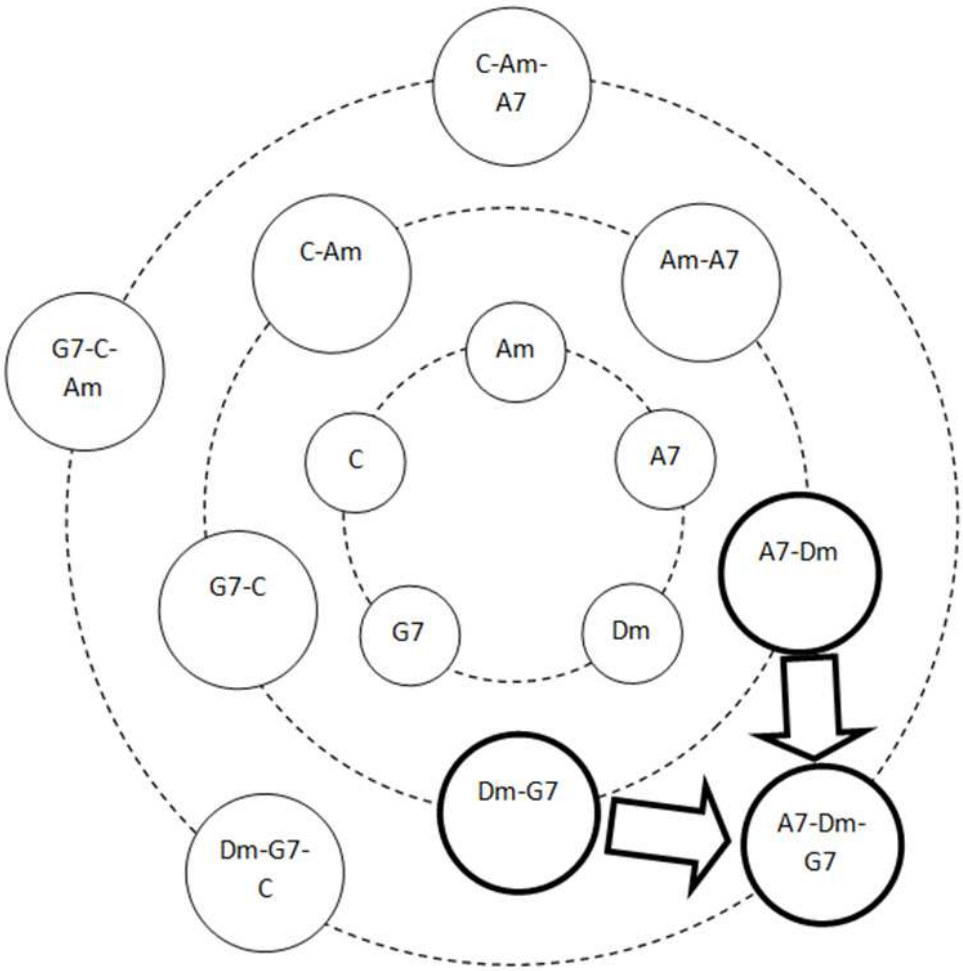
La théorie de la gravitation tonale

Aspects algorithmiques



Emanuele Di Mauro
Directeur technique du groupe ArchiveTv
et des sociétés filles Cité de mémoire, Spinal Image, et LTC patrimoine

Directeur et coordinateur technique du projet Terrarush

5, place Charles Michels 75015 Paris - 06 38 77 42 25 - emanuele.dimauro@gmail.com

Sommaire

Les aspects mathématiques et algorithmiques....4
Définitions et formalismes....5
Formalisme binaire pour un ensemble de notes....5
Opérateur intersection....5
La condensation tonale....6
L'opérateur de condensation....6
Définition de *Contrainte harmonique* (CH)....7
Définition de *Résultante mélodique* (RM)....7
La gravitation tonale....7
L'opérateur Ğ....8
Opérateur d'appartenance et de non appartenance....8
Les 3 principes de la théorie....8
Premier principe (ou principe d'exclusion)....8
Deuxième principe (ou principe d'inclusion)....9
Troisième principe....9
Corollaires issus des 3 principes....10
Premier corollaire....10
Deuxième corollaire....10
Troisième corollaire....10
Quatrième corollaire....10
Cinquième corollaire....10
Sixième corollaire :....10
Les univers....11
L'univers mélodique....11
L'univers mélodique primaire....11
L'univers mélodique de 2ème ordre....12
L'univers harmonique....13
Objectif 1 de la théorie....14
Calcul des résultantes mélodiques à partir d'une contrainte harmonique....14
Objectif 2 de la théorie....19

Objectif 3 de la théorie 23
Problématiques 23
La segmentation atomique 23
Processus de segmentation 24
Exploration de toutes les segmentation 29
Objectif 4 de la théorie 30
Problématique 30
Similitude entre résultantes et opérateur de similitude 30
Opérateur de similitude 30
Application de l'algorithme de comparaison à la segmentation atomique 32
Segmenter avant de calculer les résultantes 34
Exemples d'application de la théorie 35
Exemple 1 : séquence jazz 35
Exemple 2 : progression harmonique descendante 36
Exemple 3 : la sixte napolitaine 38
Exemple 4 : les contraintes ne sont pas des accords 42
Exemple 5 : cycle des quintes 43
Exemple 6 : segmentation atomique ? 44
Exemple 7 : le standard jazz "solar" 46

La théorie de la gravitation tonale

Les aspects mathématiques et algorithmiques

Définitions et formalismes

Formalisme binaire pour un ensemble de notes

Un accord, une gamme et en général n'importe quel ensemble de notes sera représenté par un numéro binaire à 12 bit. Chaque bit correspond à la présence (1) où l'absence (0) de la note. Le premier bit correspond à la note *"do"*, le dernier bit symbolise la note *"si"*.

Par exemple l'accord de Do majeur (do - mi - sol) sera ainsi représenté :

```
100010010000
do  mi sol
```

La gamme de do majeur :

```
101011010101
```

Les notes ***ré*** et ***si*** :

```
001000000001
```

Un ensemble de notes peut avoir une représentation décimale :

Do Majeur -> 2192
Gamme de Do majeur -> 2773

Opérateur intersection

L'opérateur intersection :

Φ

permet d'obtenir l'ensemble de toutes les notes présentes dans plusieurs ensembles de notes. Au niveau binaire il s'agit d'un OR bit à bit.

Par exemple un accord de Do majeur et un accord de Sol majeur auront l'intersection suivante :

```
100010010000 Φ 001000010001 = 101010010001
```

Ou bien :

```
2192 Φ 529 = 2705
```

Pour l'opérateur intersection vaut la propriété commutative et associative :

x1 Φ x2 = x2 Φ x1

x1 Φ x2 Φ x3 = (x1 Φ x2) Φ x3 = x1 Φ (x2 Φ x3)

La condensation tonale

On définit une condensation tonale la présence de 3 bit contigus à 1 dans la répresentation binaire d'un ensemble de notes. Par exemple dans l'ensemble suivant on remarque la présence d'une condensation tonale "111" qui démarre à partir du 3ème bit :

`10111`0010000

La notion de condensation est cyclique. Dans l'exemple suivant on remarquera une condensation tonale constituée par le premier bit et les deux derniers :

101010010**11**

L'opérateur de condensation

L'opérateur de condensation ς () est appliqué à un ensemble de notes.
Il prend la valeur ***false*** si l'ensemble de notes ne contient pas de condensation tonale.
Il prend la valeur ***true*** dans le cas inverse.

Par exemple :

```
ς(1010111010100) = true
ς(1010101010100) = false
```

On peut appliquer l'opérateur de condensation à l'intersection de deux ou plusieurs accords.
Pour l'intersection entre le Do7 et le Sol7 on aura :

```
ς(100010010110 Φ 001001010001) =
ς(101011010111) = true
```

Définition de *Contrainte harmonique* (CH)

Une contrainte harmonique est un ensemble de notes qui peuvent générer d'autres ensembles de notes.

Dans un approche classique la contrainte harmonique peut être identifiée par un accord. Mais dans la théorie de la gravitation tonale la contrainte harmonique a une signification plus large : elle peut être constituée par une seule note, ou bien aucune note, ou bien plusieurs notes.

Si la contrainte harmonique est un ensemble vide (elle contient aucune note) elle s'appelle "contrainte universelle" et un utilisera le terme CHU.

Définition de *Résultante mélodique* (RM)

La résultante mélodique est un ensemble de notes obtenues à partir d'une contrainte harmonique.

Dans un approche classique la résultante mélodique peut être identifiée par la notion de gamme.

La gravitation tonale

Pour une contrainte harmonique donnée ***x***, la gravitation tonale est l'ensemble de toutes les résultantes mélodiques y_i tels que :

$$\varsigma(x \Phi y_i) = false$$

$$avec\ i = 1...\ N$$

Par exemple :

pour l'accord de Do majeur (100010010100), la gamme de sol (101010110101) est telle que :

$$\varsigma\ (100010010100\ \Phi\ 101010110101) =$$

$$\varsigma\ (101010110101) = false$$

La gamme de Sol majeur se trouve donc dans la gravitation tonale de l'accord de Do majeur.

L'opérateur Ğ

L'opérateur Ğ appliqué à une contrainte harmonique nous donne la gravitation tonale de cette contrainte.

Le formalisme suivant :

$$\check{G}(x)$$

nous donne toutes les résultantes mélodiques que l'on peut obtenir à partir de la contrainte ***x.***

Opérateur d'appartenance et de non appartenance

Opérateur d'appartenance :
L'opérateur $\subset$ exprime l'appartenance d'une résultante à une gravitation tonale.
L'expression :

$y \subset \check{G}(x)$
signifie que la résultante y se trouve dans la gravitation tonale de la contrainte x.

Opérateur de non appartenance :
L'opérateur $\not\subset$ exprime la non appartenance d'une résultante à une gravitation tonale.

L'expression :

$y \not\subset \check{G}(x)$ signifie que la résultante y ne se trouve pas dans la gravitation tonale de la contrainte x.

Les 3 principes de la théorie

Premier principe (ou principe d'exclusion)

La résultante mélodique ne contient pas de condensation tonale.

Cela peut être exprimé comme suit :

$$\zeta(RM) = false$$

Deuxième principe (ou principe d'inclusion)

La résultante mélodique RM doit contenir toutes les notes de la contrainte CH qui l'a générée.

Cela peut être exprimé comme suit :

$$RM \Phi CH = RM$$

L'intersection entre la résultante mélodique et la contrainte qui l'a générée est égal à la même résultante mélodique.

Troisième principe

Une résultante mélodique à laquelle on peut rajouter une note sans produire de condensation tonale n'est pas complète. Pour qu'une résultante soit complète aucune note peut être ajoutée sans créer une condensation tonale.

Corollaires issus des 3 principes

Premier corollaire

Aucune contrainte harmonique peut contenir une condensation tonale.
Si cela était vrai, par absurde, n'importe quelle résultante mélodique contiendrait une condensation tonale (deuxième principe).

Deuxième corollaire

L'intervalle le plus important entre une note et une autre d'une résultante est d'un ton et demi. La présence d'une intervalle de deux tons serait en contradiction avec le troisième principe car la résultante ne serait pas complète.

Troisième corollaire

L'intersection entre n'importe quelle résultante RM1 et n'importe quelle autre résultante RM2 != RM1 contient une condensation tonale.

$$\zeta(RM1 \ \Phi \ RM2) = true$$

Quatrième corollaire

Si on considère une contrainte CH qui contient les mêmes notes de n'importe quelle résultante RM, cette contrainte pourra générer la seule résultante RM.

Dans ce cas :

$$\check{G}(CH) = \check{G}(RM) = RM$$

Cinquième corollaire

Il existe une seule contrainte qui peut générer toutes les résultantes existantes, il s'agit de la contrainte universelle **CHU**. N'importe quelle résultante appartient à la gravitation tonale de la contrainte universelle :

$$RM \subset \check{G}(CHU)$$

Sixième corollaire :

Si RM1 est une résultante mélodique, elle sera complète seulement si

$$\check{G}(RM1) = \{RM1\}$$

Les univers

L'univers mélodique

L'univers mélodique primaire

Il s'agit dans ce contexte de calculer toutes les possibles résultantes mélodiques que l'on peut obtenir en appliquant les 3 principes de la théorie.

Une routine informatique assez élémentaire nous conduit aux résultats suivants :

001100110011 001101011011 001101101011 010101010101 010101011011 010101101011 010101101101 010110011011 010110101011 010110101101 010110110011 010110110101 011001100110 011001101011	011001101101 011010101011 011010101101 011010110011 011010110101 011010110110 011011001101 011011010101 011011010110 011011011011 100110011001 100110101101 100110110101 101010101010	101010101101 101010110101 101010110110 101011001101 101011010101 101011010110 101011011001 101011011010 101100110101 101100110110 101101010101 101101010110 101101011001 101101011010	101101100110 101101101010 101101101101 110011001100 110011010110 110011011010 110101010110 110101011010 110101100110 110101101010 110101101100 110110011010 110110101010 110110101100 110110110110

Les résultats sont exprimés en binaire. Une analyse de ces résultats nous conduit à identifier les relations existantes entre les résultantes mélodiques et les gammes connues.

57 résultantes peuvent être obtenues par la théorie

- *12 gammes majeures*
- *12 gammes mineur mélodiques*
- *12 gammes mineur harmoniques*
- *12 gammes majeur harmoniques*
- *2 gamme par ton*
- *3 gammes diminuées*
- *4 gammes hexatonales*

Ces résultats sont ici reportés :

On y trouve la totalité des gammes diatoniques ou heptatoniques à une altération, et aussi des gammes symétriques à 6 ou 8 notes.

Dans la théorie, bien évidement, il n'y a aucune distinction, entre une gamme et tous ses modes (dorien, phrygien, lydien, mixolydien...). La résultante est ici un ensemble de notes non ordonnées. On perd bien évidement la notion d'octave et on considère un approche enharmonique (aucune distinction, par exemple, entre un do# et un réb).

Remarque importante :

Si l'intersection de deux contraintes contient une condensation tonale, les deux contraintes ne peuvent pas produire une gravitation tonale.
Par exemple :

> *pour l'accord de* Do7 (100010010100) *et l'accord de* Sol7 (001001010001) :
>
> ς(100010010110 Φ 001001010001) =
> ς(101011010111) = *true*
>
> On dira dans ce cas que les accords de Do7 et Sol7 ne peuvent pas produire une gravitation tonale.

Il est important de remarquer que l'intersection entre deux résultantes mélodiques contient toujours une condensation tonale. Cela peut s'exprimer comme suit :

Si RM1 et RM2 sont deux résultantes mélodiques différentes :

> ς(RM1 Φ RM2) = *true*

L'univers mélodique de 2ème ordre

Bien que les 57 résultantes mélodiques couvrent un spectre assez vaste de gammes, il y a d'autres gammes connues qui ne sont pas identifiables avec aucune des résultantes mélodiques obtenues par la théorie.

Dans ce cas :

- Soit il s'agit d'une gamme qui contient une condensation tonale et éventuellement ne respecte pas le 3ème principe de la théorie
  --> par exemple la pentatonique blues.
  Il s'agit de l'univers mélodique de 2ème ordre strict.

- Soit il s'agit d'une gamme qui ne contient pas de condensation tonale, mais qui ne respecte pas le 3ème principe de la théorie.
  --> par exemple une pentatonique
  Dans ce cas cette gamme x1 est toujours contenue dans une des gammes x2 de l'univers mélodique primaire.
  On peut toujours trouver x2, tel que :

$$x1 \Phi x2 = x2$$

Dans n'importe quel cas, on peut toujours obtenir une gamme à partir d'une combinaison de deux résultantes mélodiques, éventuellement en retirant une ou plusieurs notes.

Exemples

la gamme chromatique
on peut obtenir cette gamme comme superposition des deux gammes par ton

la gamme pentatonique
on peut obtenir cette gamme à partir d'une gamme majeur (par ex. gamme de DO) en retirant deux notes (on retire le *fa* et le *si*)

la gamme pentatonique blues
on peut obtenir cette gamme à partir de la superposition
- d'une gamme majeur (ex. gamme de DO)
- d'une gamme mineur mélodique (ex. gamme de Do mineur mélodique)

puis en retirant deux notes du résultat obtenu (on retire le *fa* et le *si*)

L'univers harmonique

En appliquant les 3 principes aux contraintes on trouve 1499 résultats.
Il n'est pas utile dans ce contexte de les lister. On y trouve tous les accords connus, mais aussi des contraintes qui contiennent une seule note, ou bien 2 ou 3, et encore des gammes, et bien évidement la contrainte universelle qui ne contient aucune note.

Le seul point en commun de toutes les 1499 contraintes est celui de ne pas contenir de condensation tonale.

Il est important de remarquer que l'intersection entre deux contraintes harmoniques ne produit pas forcement une condensation tonale.

Dans le cas où

$$\varsigma(CH1 \ \Phi \ CH2) = false$$

on peut alors affirmer que les deux contraintes harmoniques peuvent donner lieu à une même gravitation tonale.
Si au contraire :

$$\varsigma(CH1 \ \Phi \ CH2) = true$$

on peut alors affirmer que les deux contraintes harmoniques se trouvent forcement dans des gravitations tonales différentes. La possible agrégation des contraintes est alors un aspect très important, qui sera traité plus loin en objectif 3 de la théorie (segmentation des contraintes).

Objectif 1 de la théorie

Calcul des résultantes mélodiques à partir d'une contrainte harmonique

Comme on l'a dit précédemment, une résultante mélodique existe car elle a été obtenue à partir d'une contrainte harmonique en respectant les 3 principes de la théorie.

Formellement en objectif 1 on cherche la gravitation tonale pour une contrainte donnée, ***CH1*** :

$$\check{G}(CH1)$$

Une façon de procéder se base sur l'ajout des notes à partir de la contrainte, sans produire de condensation tonale et d'une façon telle qu'aucune note peut être encore ajoutée sans produire une condensation tonale.

Dans un approche topologique il s'agit d'explorer un arbre à partir des nœuds de la contrainte et en créant des branches qui rajoutent des notes.

Cette technique et ce processus pourra faire l'objet d'un autre article détaillé, mais il s'agit ici de comprendre le principe. On construira alors, à titre d'exemple, une gamme (résultante) à partir d'un accord (contrainte).

On considère alors l'accord de Do majeur qui a la représentation binaire suivante :

100010010000

Pour construire une des résultantes on commence par ajouter une note quelconque (couleur blanc sur fond noir) qui ne produit pas de condensation tonale avec les notes existantes :

110010010000

On remarque que le ***si*** ne pourra plus faire partie de la résultante en construction car il produirait une condensation tonale si-do-do#. Pour la même raison on ne peut plus rajouter le ***ré*** qui produirait la condensation tonale ***do-do#-ré***. On met donc en rouge le ***si*** et le ***ré*** qui ne pourrons plus faire partie de la résultante en construction:

1100100100000

On peut continuer à construire notre résultante, par exemple en rajoutant le ***ré# :***

1101100100000

Le rajout de cette note nous empêche d'utiliser le ***fa*** dans la résultante :

1101100100000

On peut en revanche utiliser le ***fa#*** :

1101101100000

On ne peut plus utiliser le ***sol*** :

1101101100000

A ce stade on peut encore rajouter le ***la*** ou le ***la#***. On rajoute le ***la*** :

1101101101000

La résultante n'est pas complète car on peut encore ajouter le ***la#*** sans produire une condensation tonale :

1101101101100

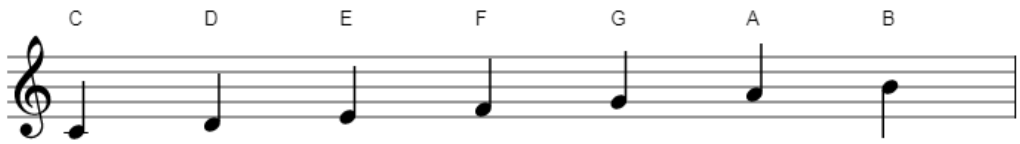
A ce stade, on ne peut plus rajouter des notes sans produire une condensation tonale. Le processus est fini. On a obtenu la résultante suivante :

110110110110

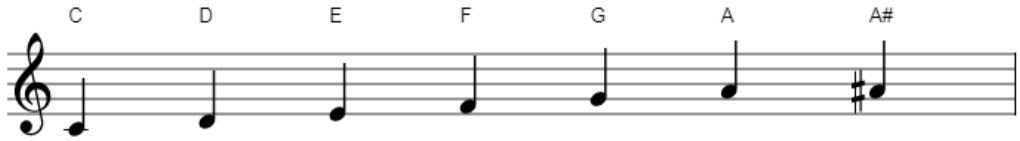
Il s'agit d'une gamme ton demi-ton. Dans le jazz on l'appelle "gamme diminuée".
En répétant ce processus on obtiendra 12 résultantes à partir de l'accord de Do Majeur.
En général, n'importe quel accord majeur peut générer 12 gammes.

Le calcul assisté par ordinateur nous donne alors ces résultats (pour la contrainte "Accord de Do Majeur") :

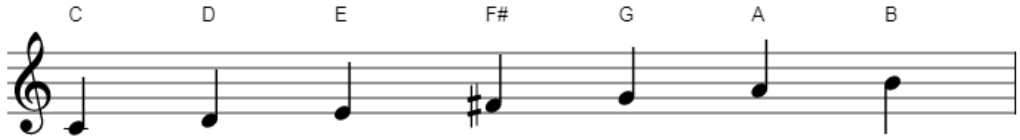
DO majeur / LA mineur



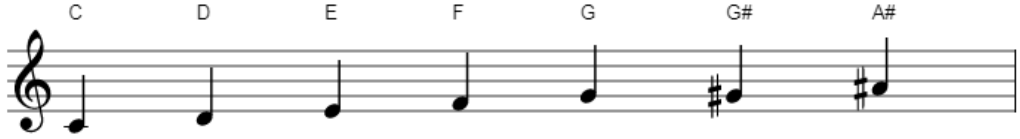
FA majeur / RE mineur



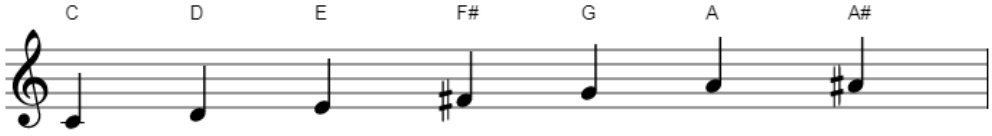
SOL majeur / MI mineur



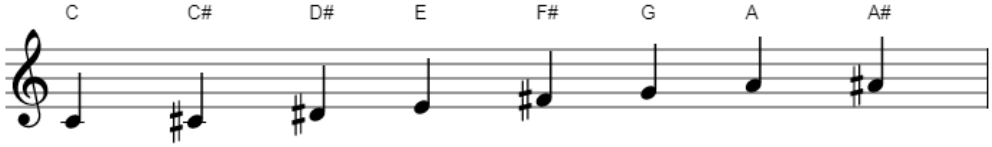
FA mineure mélodique



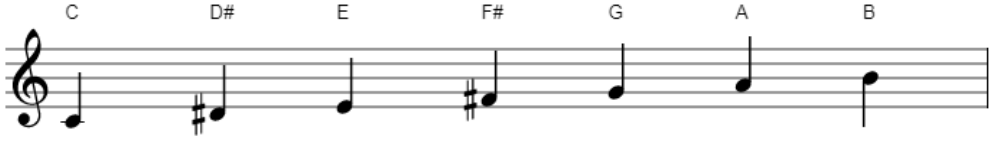
SOL mineure mélodique



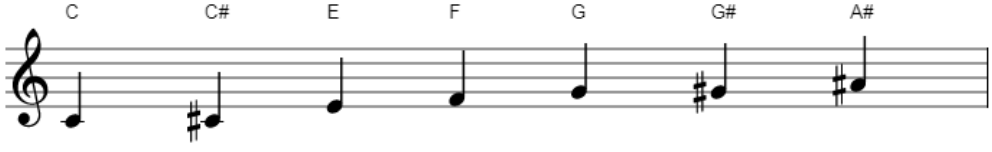
Gamme diminuée en DO#



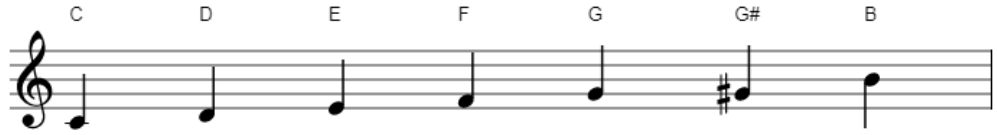
MI mineure harmonique



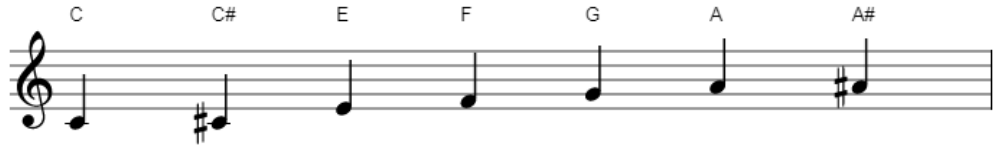
FA mineure harmonique



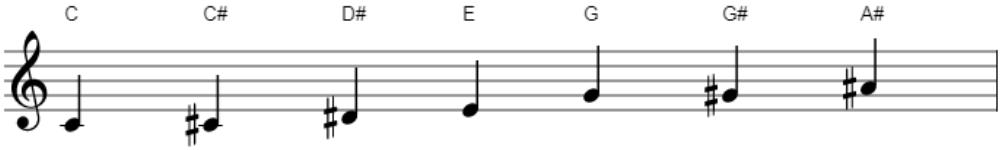
DO majeur harmonique



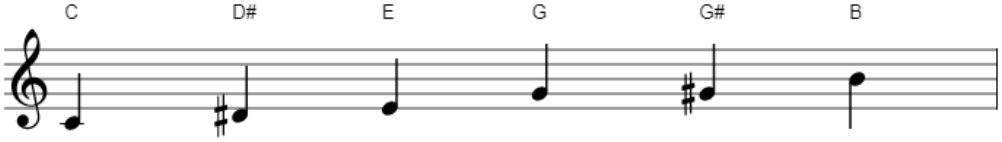
FA majeur harmonique



SOL# majeur harmonique



RE# hexatonique



On voit alors que dans ce processus un accord (contrainte) produit des gammes (résultantes).

Mais la contrainte n'est pas forcement un accord. Le tableau qui suit montre les 33 gammes générées à partir d'une seule note, le ***do*** :

DO majeur / LA mineur	SOL mineure mélodique	LA mineure harmonique
DO# majeur / LA# mineur	LA mineure mélodique	SIb mineure harmonique
RE# majeur / DO mineur	SIb mineure mélodique	MI majeur harmonique
FA majeur / RE mineur	Gamme par ton en DO	DO majeur harmonique
SOL majeur / MI mineur	Gamme diminuée en DO	SOL majeur harmonique
SOL# majeur / FA mineur	Gamme diminuée en DO#	LA# majeur harmonique
SIb majeur / SOL mineur	DO mineure harmonique	FA majeur harmonique
DO mineure mélodique	DO# mineure harmonique	DO# majeur harmonique
DO# mineure mélodique	MI mineure harmonique	SOL# majeur harmonique
RE# mineure mélodique	FA mineure harmonique	RE# hexatonique
FA mineure mélodique	SOL mineure harmonique	DO hexatonique

On peut voir ce résultat de la façon suivante : parmi les 57 gammes de l'univers mélodique primaire il y en a 33 qui contiennent la note ***do***.

Pour un accord Do Maj7 add 13 (Notes : do - mi - sol - la -si) on obtient les 3 résultantes :

DO majeur / LA mineur
SOL majeur / MI mineur
MI mineure harmonique

On peut voir ce résultat de la façon suivante : parmi les 57 gammes de l'univers mélodique primaire il y en a 3 qui contiennent les notes ***do, mi, sol, la, si***.

Objectif 2 de la théorie

L'objectif 2 de la théorie vise à trouver une ou plusieurs résultantes à partir de deux ou plusieurs contraintes. Dans un approche classique on cherche les gammes qui peuvent être utilisées sur deux ou plusieurs accords.

Formellement en objectif 2 on cherche la gravitation tonale pour un ensemble de contraintes ***CH1, CH2... CHn***.

On peut montrer facilement que :

$$\check{G}(CH1, CH2, ..., CHn) \subset \{\check{G}(CH1), \check{G}(CH2), .. \check{G}(CHn)\}$$

La gravitation tonale d'un ensemble de contraintes est un sous-ensemble de toutes les gravitations tonales obtenues sur chaque contrainte.

et que :

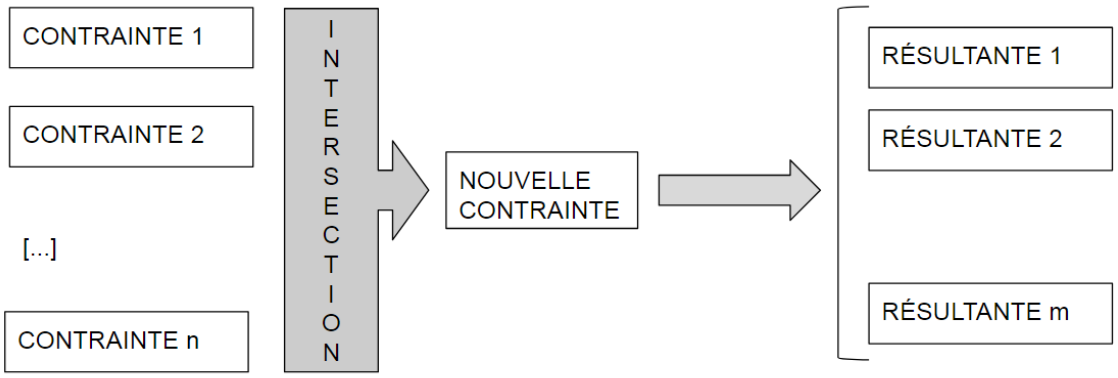
$$\check{G}(CH1, CH2, ..., CHn) = \check{G}(CH1 \Phi\ CH2 \Phi .. \Phi\ CHn)$$

La gravitation tonale d'un ensemble de contraintes est égal à la gravitation tonale de l'intersection des contraintes.

Ces résultats sont prévisibles car une gravitation tonale est obtenue à partir d'un ensemble de notes. L'intersection de plusieurs contraintes nous donne en effet l'ensemble de toutes les notes contenues dans chaque contrainte.

La gravitation tonale que l'on obtient est donc moins large par rapport à toutes les gravitations tonales obtenues sur chaque contrainte.

Le processus général en objectif 2 est ici de suite représenté :



Plusieurs contraintes en entrée *(traditionnellement plusieurs accords)* → … produisent une nouvelle contrainte *(il ne s'agit pas d'un accord au sense classique du terme)* → … qui permet d'obtenir toutes les résultantes possibles *(gammes associées aux accords initiaux)*

Pour comprendre ce processus on l'applique dans un cas concret pour obtenir la gravitation tonale pour les accords Do Majeur et Sol Majeur.

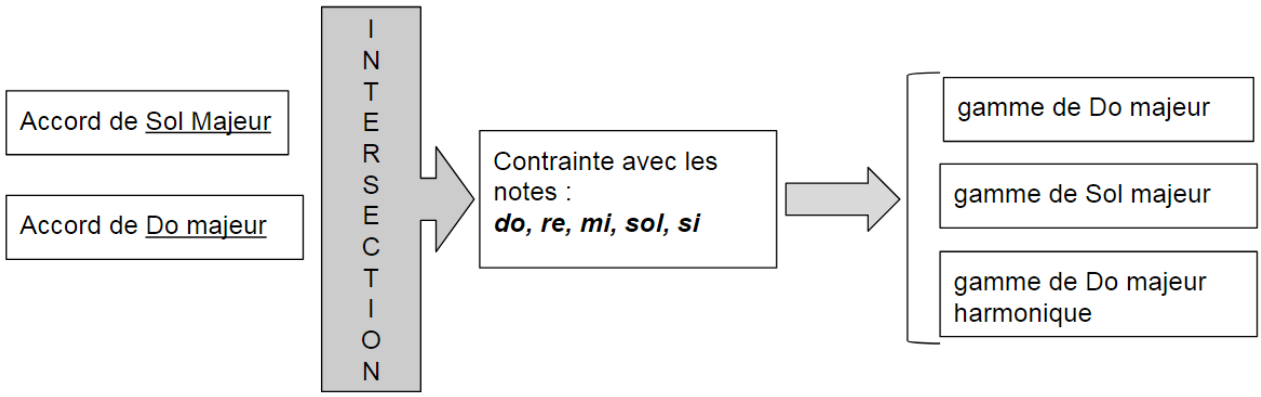
Comme on a vu en objectif 1 la gravitation tonale pour chacun de ces deux accords donne lieu à 12 résultantes. Mais si on veut calculer la gravitation tonale pour l'ensemble des deux accords il faudra initialement produire l'intersection et par la suite calculer toutes les résultantes à partir de cette intersection.

```
Do majeur    : 100010010000
Sol majeur   : 001000010001
               ____________
Intersection : 101010010001
```

La gravitation tonale pour l'intersection des deux accords nous donne les résultantes suivantes :

```
gamme de DO majeur / LA mineur
gamme de SOL majeur / MI mineur
gamme de DO majeur harmonique
```

Le processus est ici représenté :

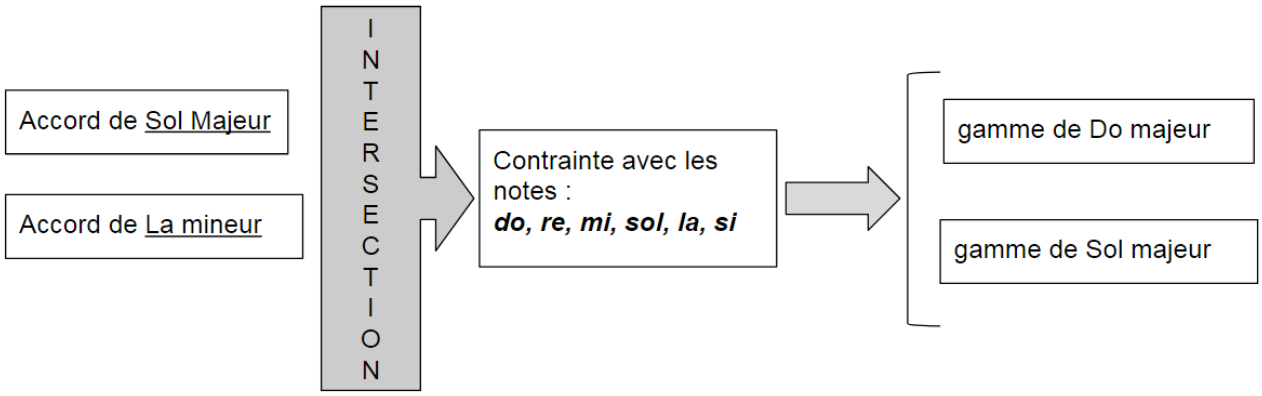


On remarque que ces résultats peuvent être obtenues en cherchant les résultantes communes entre la gravitation tonale du Do Majeur et la gravitation tonale du Sol Majeur :

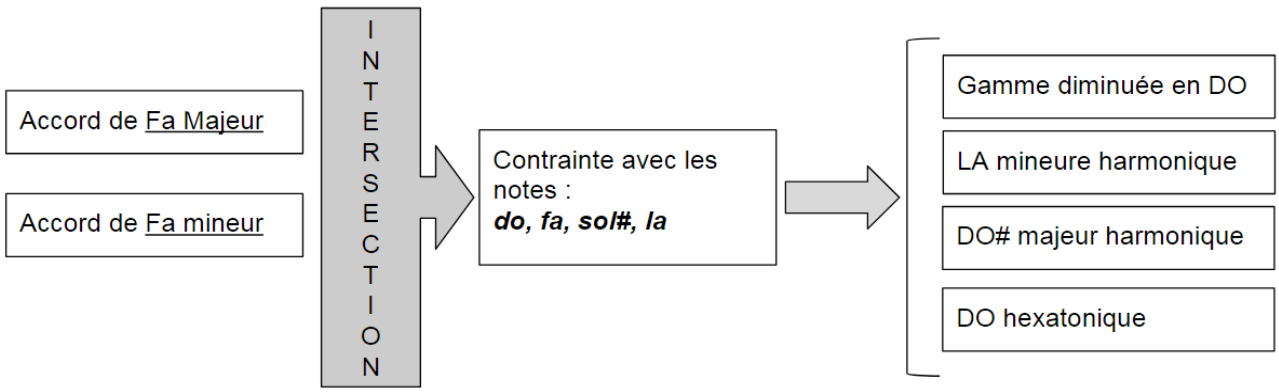
Gravitation tonale de l'accord de Do Majeur	Gravitation tonale de l'accord de Sol Majeur
DO majeur / LA mineur	**DO majeur / LA mineur**
FA majeur / RE mineur	RE majeur / SI mineur
SOL majeur / MI mineur	DO mineure mélodique
FA mineure mélodique	**SOL majeur / MI mineur**
SOL mineure mélodique	RE mineure mélodique
Gamme diminuée en DO#	Gamme diminuée en RE
MI mineure harmonique	DO mineure harmonique
FA mineure harmonique	SI mineure harmonique
DO majeur harmonique	RE# majeur harmonique
FA majeur harmonique	**DO majeur harmonique**
SOL# majeur harmonique	SOL majeur harmonique
RE# hexatonique	RE hexatonique

D'autres exemples :

Gravitation tonale pour les accords Sol majeur et La mineur :



Gravitation tonale pour les accords Fa majeur et Fa mineur :



L'objectif 2 de la théorie doit aussi établir si deux ou plusieurs contraintes peuvent ou pas avoir une gravitation tonale non vide. Dans certains cas, en effet, aucune résultante peut être obtenue à partir d'un ensemble de contraintes.

Un test doit alors nous permettre d'établir si une gravitation tonale existe pour un ensemble de contraintes donné.

Pour cela on applique l'opérateur de condensation à l'intersection des contraintes :

$$\varsigma(CH1 \Phi CH2 \Phi ... \Phi CHn)$$

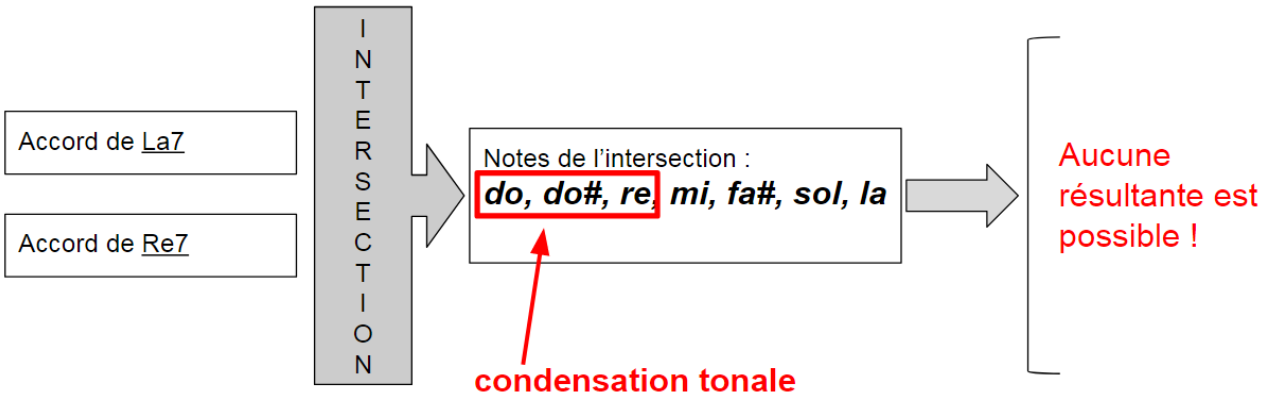
=> *false* : Une gravitation tonale existe

=> *true* : Aucune gravitation tonale peut exister

Prenons l'exemple suivant : on cherche la gravitation tonale pour les accords La7 etRe7.

```
La7          : 010010010100
Re7          : 101000100100
               ____________
Intersection : 111010110100
```

La condensation ***do-do#-re*** est présente dans l'intersection. Aucune résultante est possible, la gravitation tonale est alors un ensemble vide.



Objectif 3 de la théorie

Problématiques

Comme on l'a vu en objectif 2, il peut y avoir une séquence de contraintes qui n'a pas de gravitation tonale associée. Dans ce cas on pourrait dire que pour cette séquence d'accords, aucune gamme peut être associée (si on considère les 57 gammes possibles de l'univers mélodique primaire). Cela peut être mesuré par un test sur la présence d'une condensation tonale dans l'intersection de toutes les contraintes.

Prenons alors la séquence d'accords suivante :

```
Am - A7 - Dm - G7 - C
```

L'intersection entre ces accords nous donne la condensation tonale ***do - do# - re.***
Aucune résultantes pourra donc être associée à cette séquence d'accords.

En objectif 3 on doit alors segmenter la séquence d'accords en sous-séquences qui aurons chacune une gravitation tonale.

Par exemple :

```
Am - A7 - Dm - G7 - C
-> [Am - A7] - [Dm - G7 - C]
```

Les deux ensembles `[Am - A7]` et `[Dm - G7 - C]` s'appellent *segments*.

Le segment [Am et A7] a une gravitation tonale non vide :

```
Gamme diminuée en DO#
FA majeur harmonique
```

Le segment [Dm - G7 - C] a lui aussi une gravitation tonale :

```
Gamme de DO Majeur
```

Le problème que l'on se pose est donc similaire à un problème de détection d'un changement de tonalité, sauf que ici il s'agit plutôt d'un changement de gravitation tonale.

La segmentation atomique

Une première réflexion nous porte à dire qu'on peut toujours segmenter les contraintes une par une, et réaliser ce qu'on appelle une segmentation atomique :

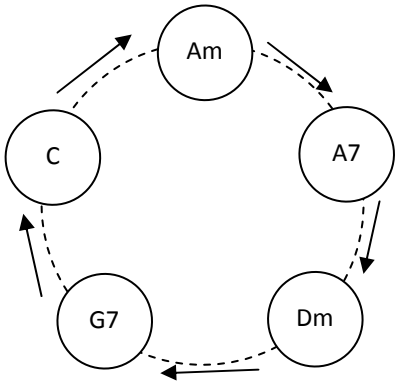
```
Am - A7 - Dm - G7 - C
-> [Am] - [A7] - [Dm] - [G7] - [C]
```

Chaque contrainte aura alors sa propre gravitation tonale.

Le passage d'une contrainte à l'autre impliquera donc le passage entre gravitations tonales différentes, chacune liée à une seule contrainte.

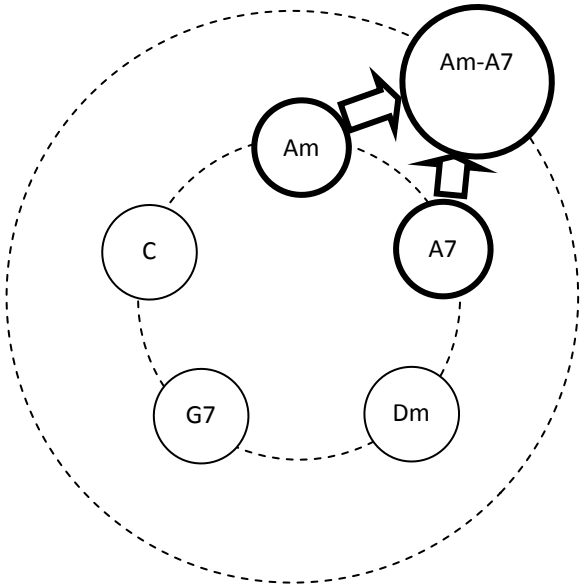
Processus de segmentation

Le processus démarre à partir de la segmentation atomique qui peut être ainsi représentée :



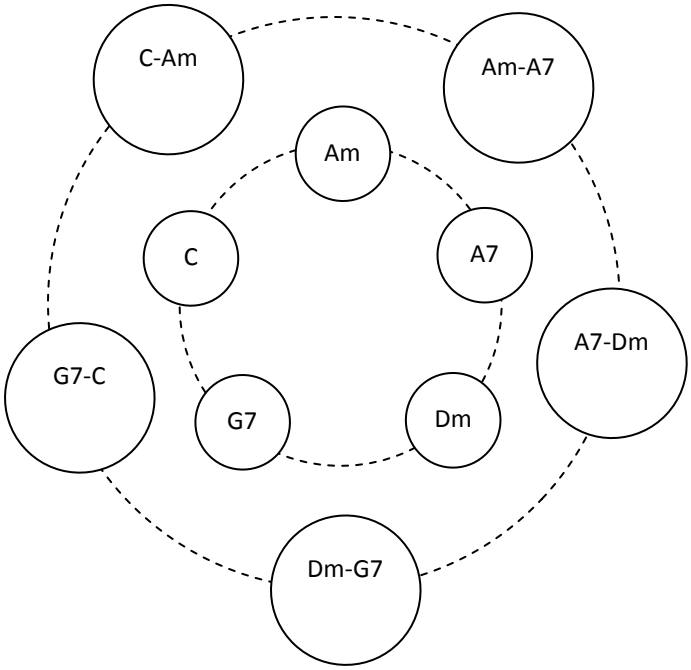
La ligne en pointillée représente une première ligne de gravitation. Sur cette ligne chaque cercle représente une gravitation tonale. Pour obtenir toutes les segmentations possibles une deuxième ligne de gravitation va être construite en essayant de grouper les gravitations tonales adjacentes. De la même façon on construira une troisième ligne de gravitation, puis une quatrième, jusqu'au moment où on ne peut plus grouper les gravitations tonales.

On rajoute alors une deuxième ligne de gravitation et on crée d'autres gravitation tonales par couple de gravitations de la ligne de gravitation précédente :

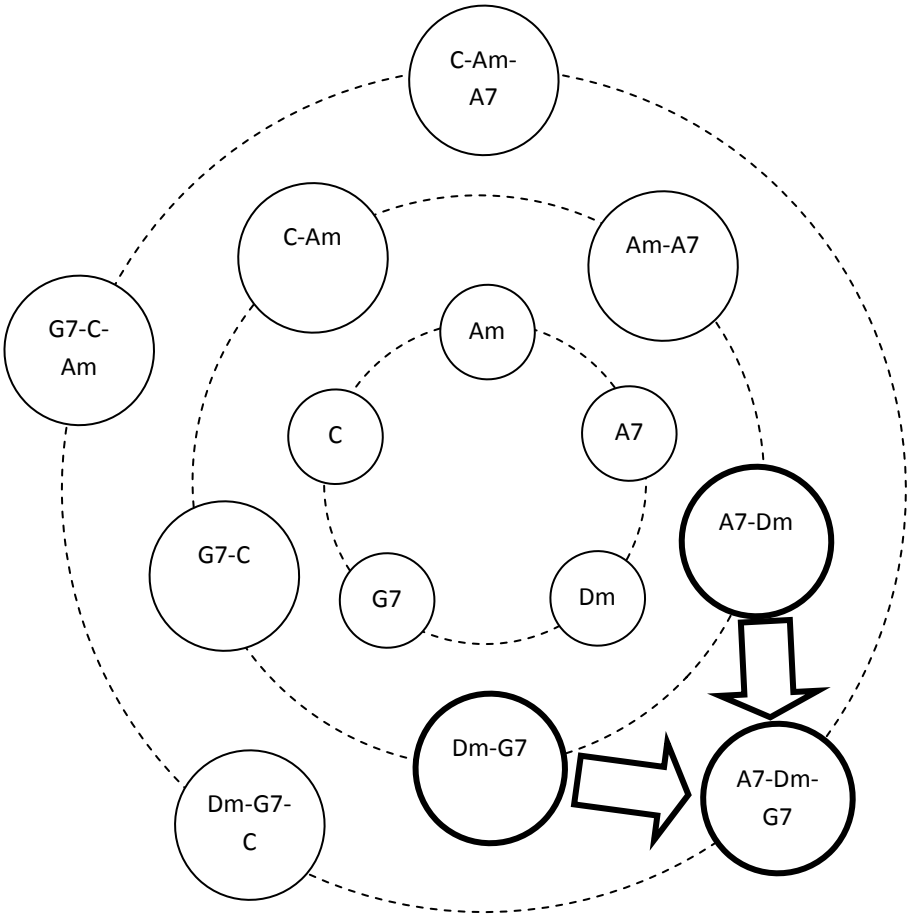


Dans l'exemple on voit que la gravitation tonale [Am-A7] a été produite à partir des gravitations tonales [Am] et [A7]. Ce processus n'est pas toujours possible. Il faut que l'intersection des deux accords ne produise pas de condensation tonale.

Avec le même principe on complète la deuxième ligne de gravitation en groupant si possible les gravitations tonales adjacentes:



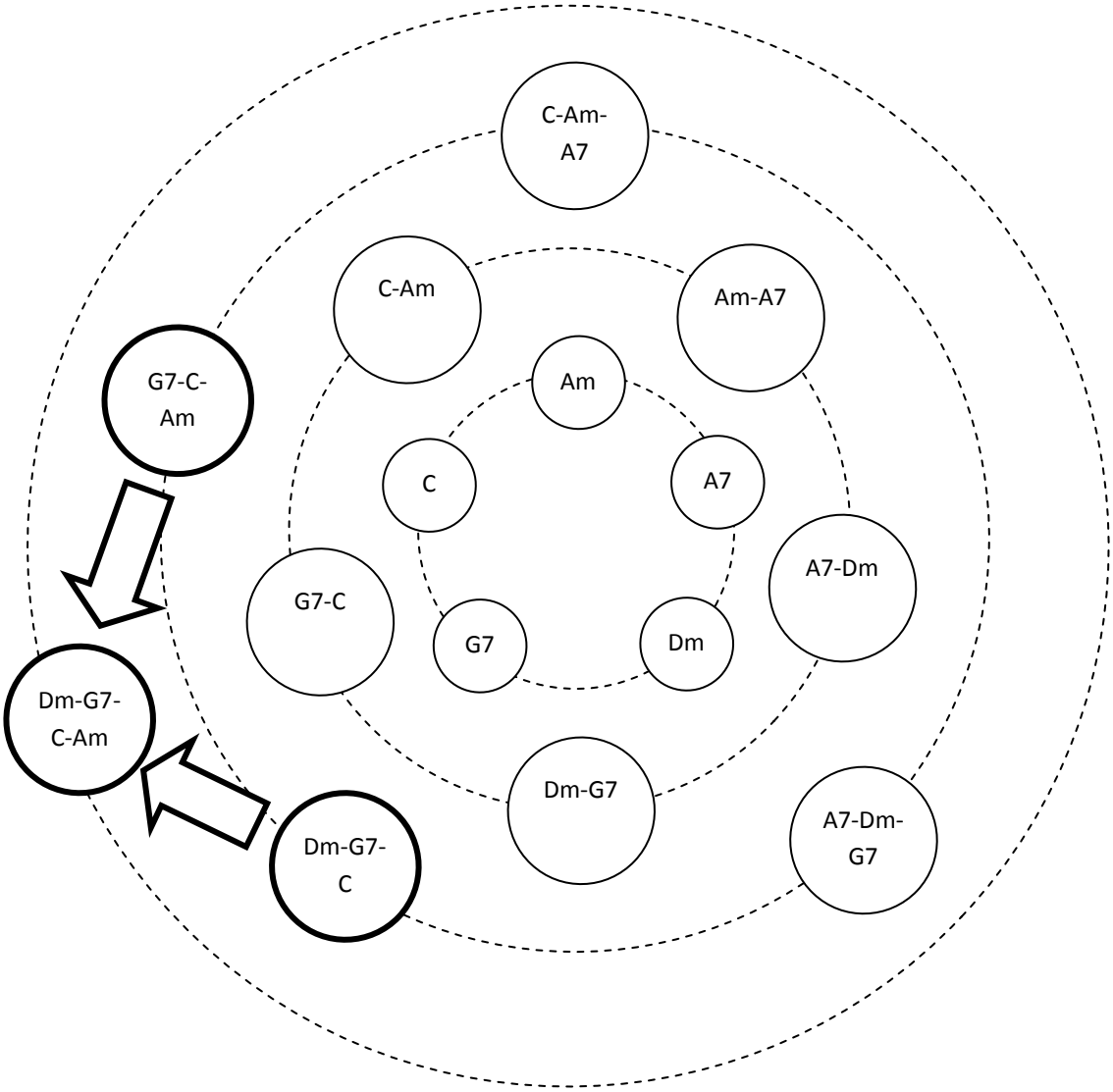
On continue en produisant une troisième ligne de gravitation :



Dans l'exemple on voit que la gravitation tonale [A7-Dm-G7] a été produite à partir des gravitation [A7-Dm] et [Dm-G7]. Il faut remarquer que la répétition d'une contrainte dans une gravitation tonale n'a pas de signification utile. On a alors [A7-Dm-G7] au lieu d'avoir [A7-Dm-Dm-G7].

On remarque aussi que les gravitations [Am-A7] et [A7-Dm] n'ont pas généré [Am-A7-Dm] car l'intersection des ces trois accords produit la condensation tonale ***do-do#-re***.

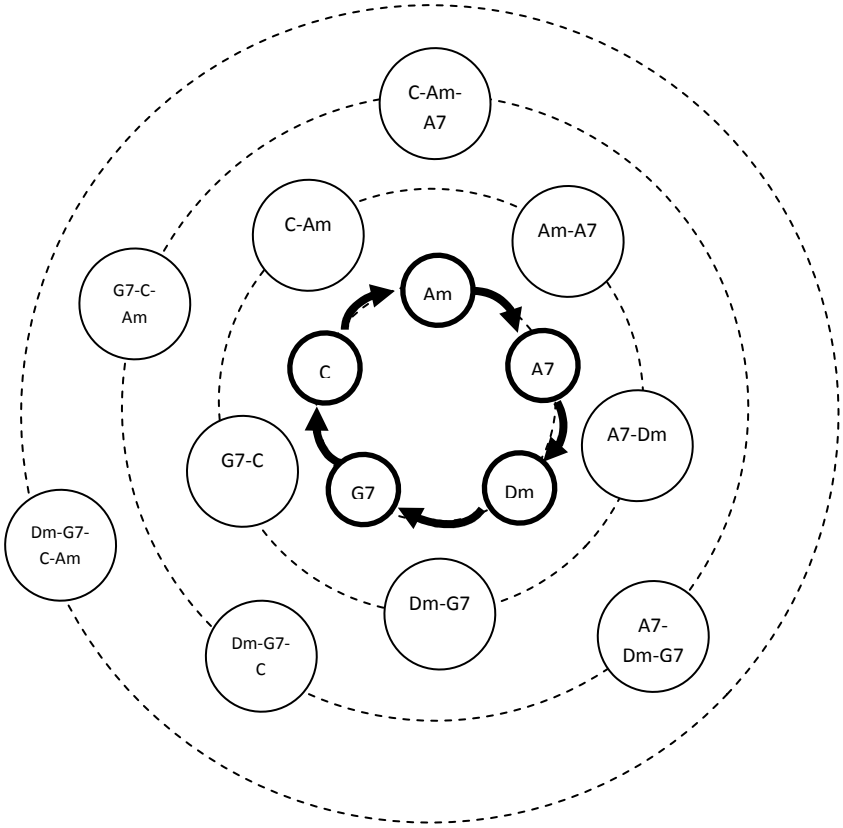
A ce stade, une autre ligne de gravitation peut être ajoutée car les gravitations [Dm-G7-C] et [G7-C-Am] peuvent donner lieu à la gravitation [Dm-G7-C-Am]:



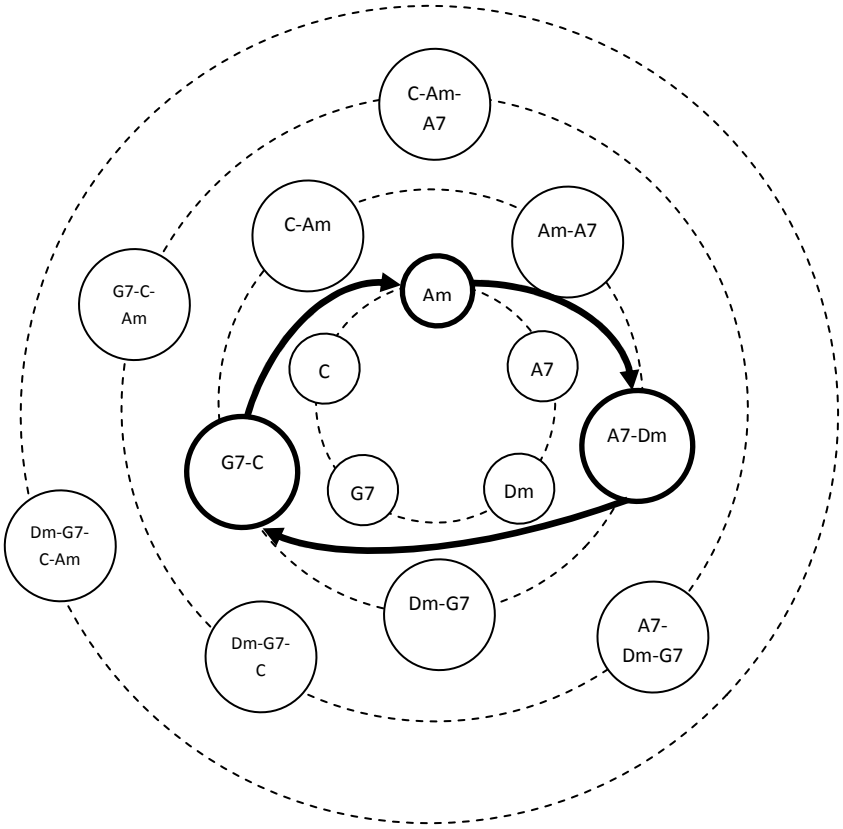
Aucune autre gravitation tonale peut être produite ultérieurement.

Il s'agit maintenant d'explorer tous les parcours possibles à partir du premier accord Am jusqu'à l'accord C, et éventuellement prévoir des parcours cycliques.

Une première possibilité est de segmenter avec une segmentation atomique

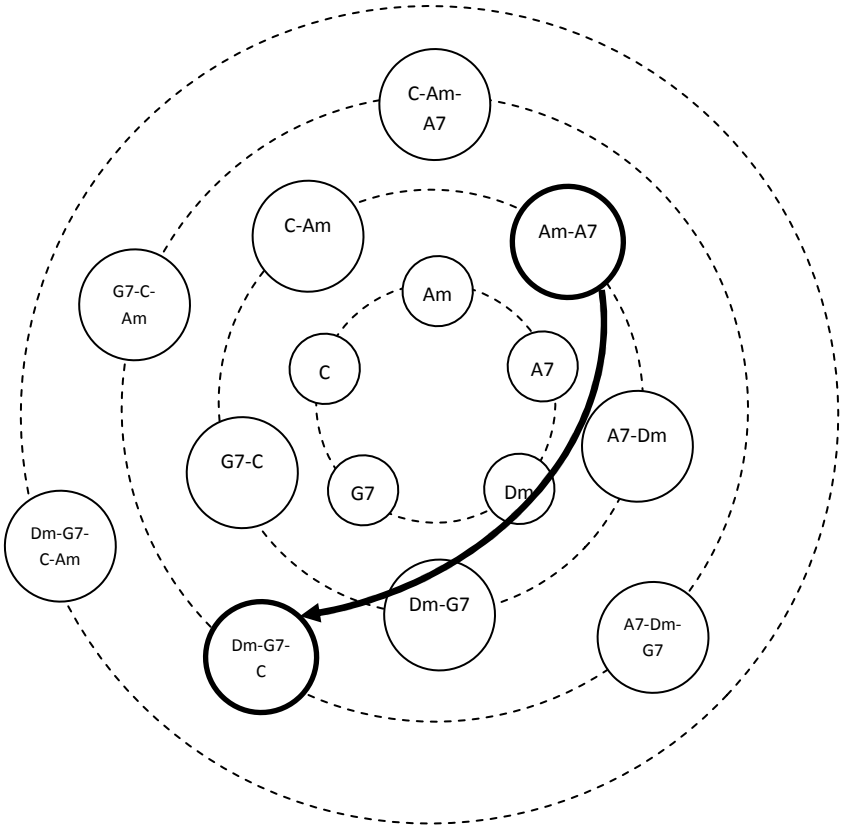


Plusieurs autres possibilités existent. Par exemple :



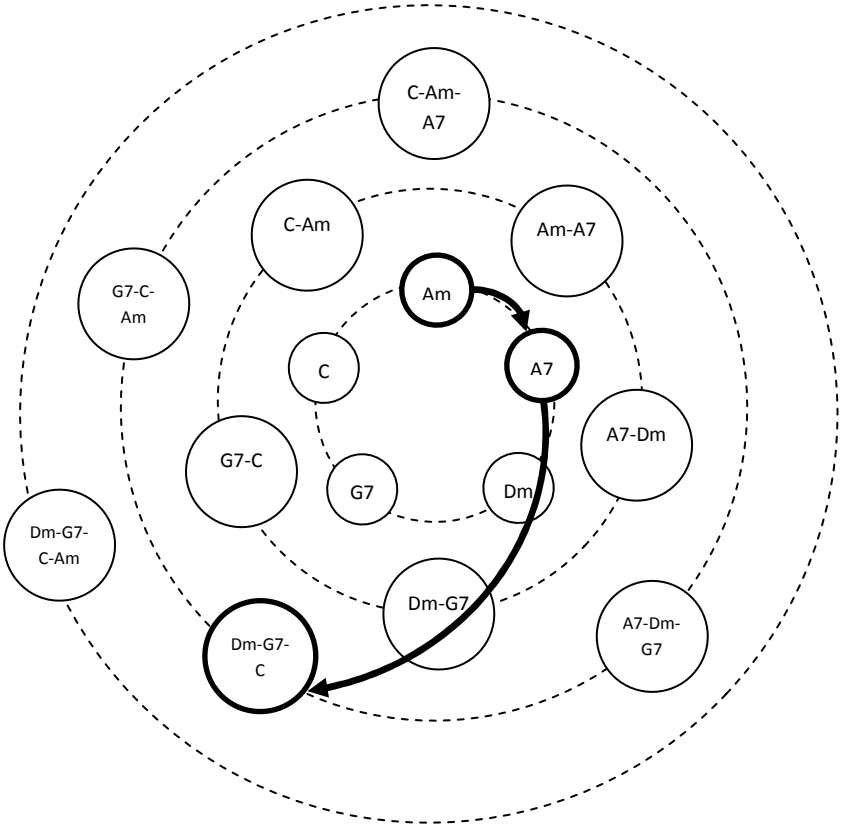
Segmentation

[Am] - [A7-Dm] - [G7-C]



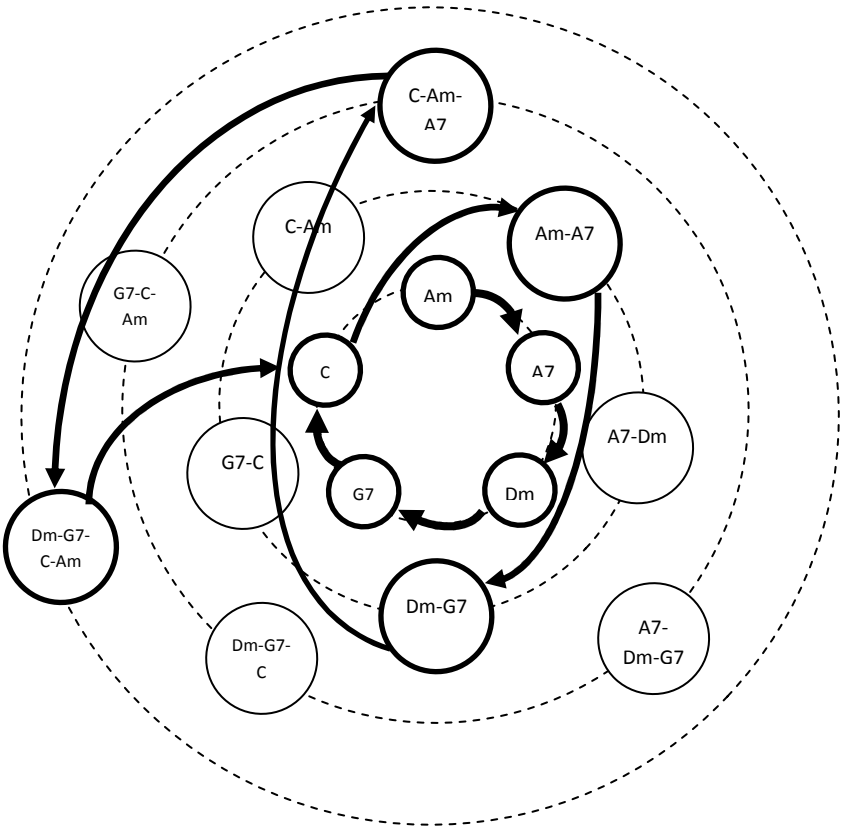
Segmentation

[Am-A7] - [Dm-G7-C]



Segmentation

[Am]- [A7] - [Dm-G7-C]



Segmentation cyclique :

```
[Am]- [A7] - [Dm] -
[G7] - [C] - [Am-A7] -
[Dm-G7] - [C-Am-A7] -
[Dm-G7-C-Am] - [C]
```

Exploration de toutes les segmentation

Un algorithme d'exploration de toutes les segmentations possibles a été mis en place, mais il ne sera pas exposé dans cet article. Cet algorithme réduit les segmentations d'une façon considérable en gardant que les segmentations utiles. Le principe est de ne pas avoir deux segments contigus si on peut les grouper dans une seule gravitation tonale.

Si on considère l'exemple précédant l'algorithme de segmentation conduit aux 3 résultats suivants :

```
1) [Am,A7]      -    [Dm,G7,C]
2) [Am]         -    [A7,Dm,G7]      -    [C]
3) [Am]         -    [A7,Dm]         -    [G7,C]
```

Chaque segment peut avoir une ou plusieurs gammes associées (issues des 57 résultantes de l'univers mélodique primaire). En objectif 4 on pourra établir un critère pour choisir les gammes à utiliser pour chaque gravitation tonale.

Objectif 4 de la théorie

Problématique

L'objectif 3 a introduit la notion de segmentation :

> La segmentation nous permet de séparer les contraintes en groupes qui ont chacun ou moins une résultante associée.
> *Chaque nouveau groupe de contraintes aura donc une gravitation tonale non vide.*

L'objectif 4 nous permet maintenant de choisir pour chaque segment la résultante à utiliser.

> *Ce choix se fait en comparant les résultantes entre une gravitation tonale et la suivante.*
>
> *La comparaison se fait grâce à une notion de similitude entre résultantes.*
>
> *La similitude entre résultantes se base sur un algorithme qui produit un résultat normalisé.*

Similitude entre résultantes et opérateur de similitude

Pour choisir les résultantes une notion de similitude est introduite.
Le passage d'une gravitation tonale à l'autre implique l'exigence de choisir une résultante (gamme au sens classique du terme) pour chacune des gravitations tonales.

La résultante n'est pas choisie dans l'absolu, mais en fonction de la similitude avec les résultantes de la gravitation tonale suivante.

Opérateur de similitude

Si on considère deux résultantes mélodiques RM1 et RM2, l'opérateur de similitude doit fournir un numéro qui a la propriété d'avoir une valeur proportionnel à la similitude entre les résultantes :

$$\dot{S}(RM1,RM2)$$

Le résultat de similitude doit être maximal quand on compare une résultante avec elle même :

$$\dot{S}(RM,RM) \dashrightarrow Vmax$$

On veut aussi que Vmax ne dépende pas de la résultante, ce qui implique que la valeur doit être normalisée.

La théorie propose alors un algorithme de comparaison qui respecte les propriétés qu'on vient d'évoquer :

Algorithme de comparaison

On considère deux gammes à comparer- On part d'un indice de similitude de 0- Pour chacune des 12 notes chromatiques (do, do#, ré…) on vérifie si la note est présente dans les deux gammes

1) Si la note est présente dans les deux gammes l'indice de similitude est incrémenté d'une valeur 1. 2) Si la note n'est pas présente dans les deux gamme l'indice de similitude est incrémenté d'une valeur 1.3) Si la note est présente dans une gamme, mais pas dans l'autre l'indice de similitude n'est pas incrémenté.

Il s'agit donc d'un BIT COUNT d'un XNOR bit à bit entre les deux résultantes exprimées dans une forme binaire.

La valeur de similitude est comprise entre 0 et 12 :

$$\dot{S}(RM1,RM2) \dashrightarrow 0 \ldots 12$$

Elle est telle que l'auto-similitude de n'importe quelle résultante vaut 12 :

$$\dot{S}(RM,RM) = 12$$

La valeur 0 exprime la comparaison entre le deux gammes par ton. Si on exprime ces deux gammes en décimal on aura :

$$\dot{S}(2730,1365) = 0$$

D'une façon seulement qualitative on peut exprimer la similitude entre deux résultantes de la façon suivante :

	$\dot{S}$
Auto-similitude : les résultantes sont identiques	12
Très forte similitude	9 - 10
Forte similitude	7 - 8
Similitude moyenne	5 - 6
Basse similitude	3 - 4

Très basse similitude	0 - 2

Le tableau qui suit montre des exemple de comparaisons entre résultantes :

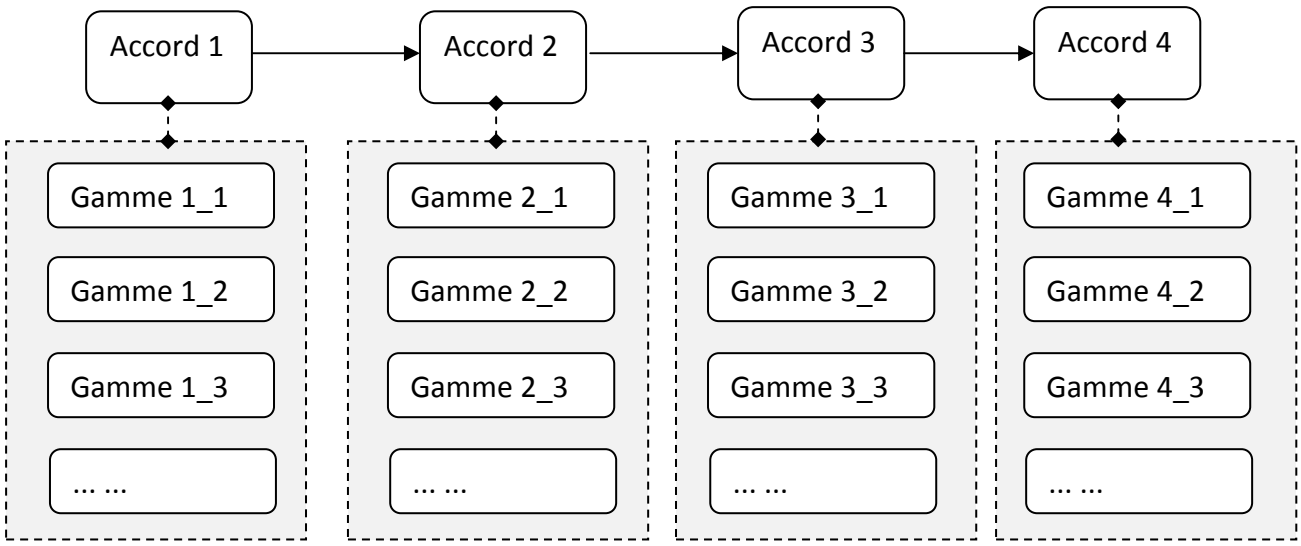
Gamme 1	Gamme 2	Similitude
DO majeur	DO majeur	12
SOL mineure mélodique	SOL majeur	10
Gamme diminuée en DO#	DO# mineure harmonique	9
FA majeur	SIb mineure mélodique	8
FA majeur	DO hexatonique	7
FA majeur	SIb mineure harmonique	6
DO majeur	Gamme par ton en DO	5
SOL mineure mélodique	DO# majeur	4
SOL mineure mélodique	Gamme par ton en DO#	3
DO majeur	DO# majeur	2
Gamme par ton en DO	Gamme par ton en DO#	0

Remarques :
La valeur maximale de similitude entre résultantes différentes est de 10.
La similitude 11 et 1 n'existent pas.

Application de l'algorithme de comparaison à la segmentation atomique

On peut appliquer l'algorithme de similitude à une segmentation atomique. Cela nous évite de passer par les algorithmes de segmentation vus en objectif 3.

Pour une séquence d'accords donnée, on crée alors une gravitation tonale pour chaque accord de la séquence et on calcule toutes les combinaisons des gammes en attribuant pour chaque transition un score de similitude. Ce processus est ici représenté :



Comme il s'agit d'une combinaison d'accords il faudra calculer une similitude moyenne et éventuellement une variance de similitude qui nous permettra d'avoir un indice qui concerne les variations de similitudes entre une gravitation tonale et l'autre.

Il faudra par la suite trier les résultats en ordre décroissant de similitude.

Accord1	Sim	Accord2	Sim	Accord3	Sim	Accord4	Sim moyenne	Ecart
Gamme 1_1	10	Gamme 2_3	8	Gamme 3_5	10	Gamme 4_2	9.33	1.63
Gamme 1_1	10	Gamme 2_3	7	Gamme 3_6	7	Gamme 4_1	8	2.44
...	...	...	...	...	...	...	...	...

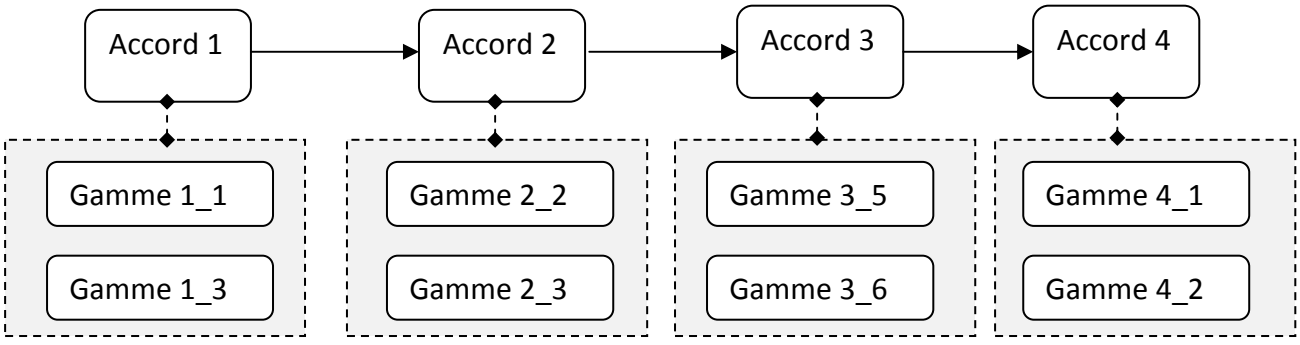
Cet approche donne des très bons résultats, mais il a le désavantage d'être assez gourmand en calcul machine, car chaque accord isolé produit un nombre important de résultantes et le nombre de combinaisons de gammes dévient vite très important.

Pour une suite de 10 accords majeurs ou mineur, par exemple, chaque gravitation tonale pour chacun des accords est constituée par 12 résultantes.

Le nombre de combinaisons des gammes est donc de 12^{10} ce qui nous donne environ 60 milliards de combinaisons de gammes possibles. Il faudra donc calculer environ 12^{10} x 9 scores de similitude (environ 550 milliards de coefficients).

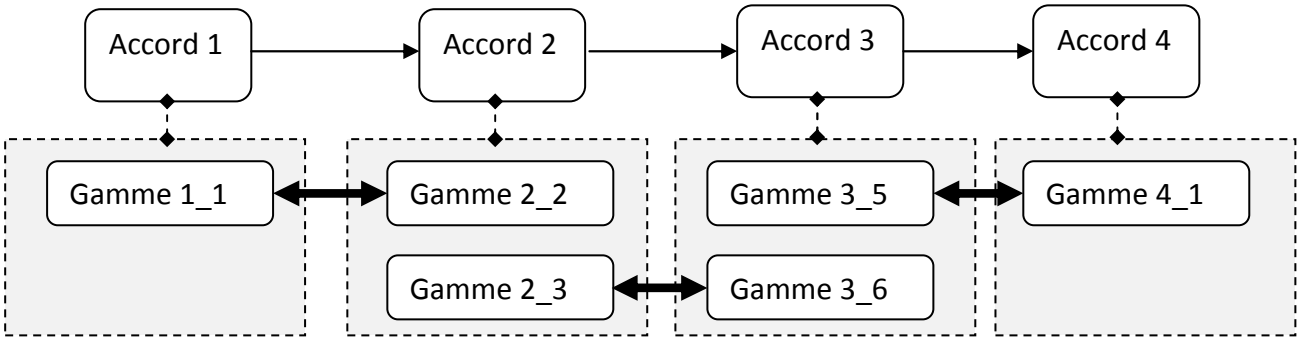
Face à cette explosion combinatoire un pré calcul doit être fait pour réduire considérablement les résultantes associées à chaque gravitation tonale.

L'objectif est d'associer à chaque gravitation tonale seulement 2 résultantes, avant de lancer le calcul final de similitude.



Cela peut être obtenu en calculant pour chaque gravitation tonale la résultante la plus similaire avec une des résultantes de la gravitation précédente et la plus similaire avec les résultantes de la gravitation suivantes :

Le premier et le dernier accord auront une seule résultante.



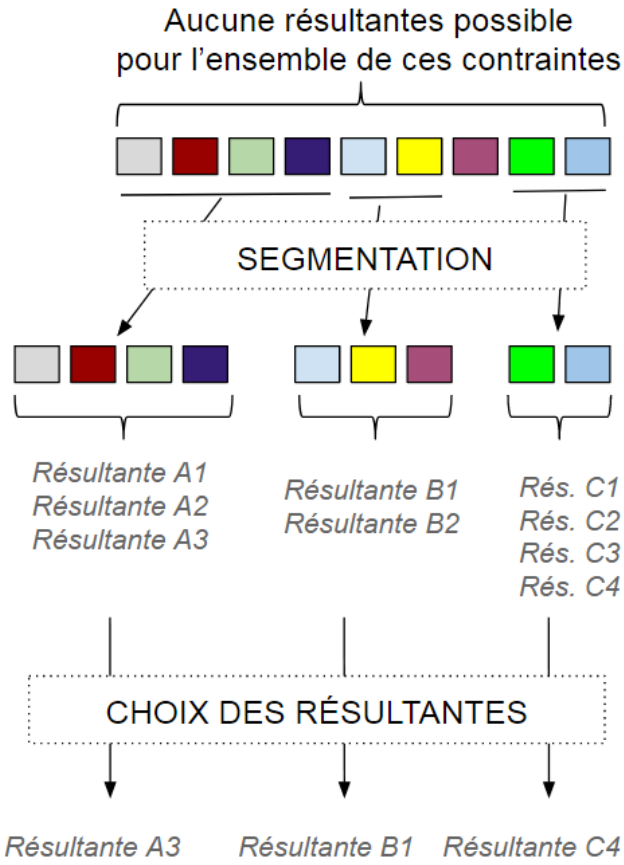
Pour une suite de 10 accords on aura alors $2^{10-2} = 2^8 = 256$ combinaisons au lieu de 60 milliards.

On pourrait d'ailleurs limiter les gammes d'une façon moins stricte et, par exemple, restreindre à 3 le nombre de résultantes retenues pour chaque gravitation tonale.

Segmenter avant de calculer les résultantes

Une autre approche se base sur le fait de segmenter les contraintes comme on l'a vu en objectif 3. La segmentation réduit considérablement le nombre de gammes pour chaque segment. D'ailleurs la segmentation nous montre les possibles façons de grouper les accords.

Le schéma suivant montre ce processus :



Le segmentation a un double avantage :

1- On réduit le nombre de segments

2 - On réduit le nombre de résultantes pour chaque gravitation tonale

Exemples d'application de la théorie

Exemple 1 : séquence jazz

On considère la suite d'accords :

```
G7 - C7
```

Il s'agit d'une séquence très utilisée dans le jazz. Un accord de septième dominante (G7) devrait évoluer vers la tonique (C). Mais l'accord de tonique est lui même un accord de septième (C7) qui évolue lui même vers sa tonique (F). Le résultat est une sorte de tension harmonique permanente.

La façon la plus simple de jouer cette séquence est d'utiliser la gamme de Do majeur quand on est sur l'accord de G7, et la gamme de Fa majeur quand on est sur l'accord de C7.

On applique alors les règles de la théorie pour voir si on retrouve un résultat cohérent avec cette vérité terrain. En premier lieu on vérifie si l'intersection des deux accords produit une condensation tonale :

$$\varsigma(\mathbf{G7} \ \Phi \ \mathbf{C7}) = \mathit{true}$$

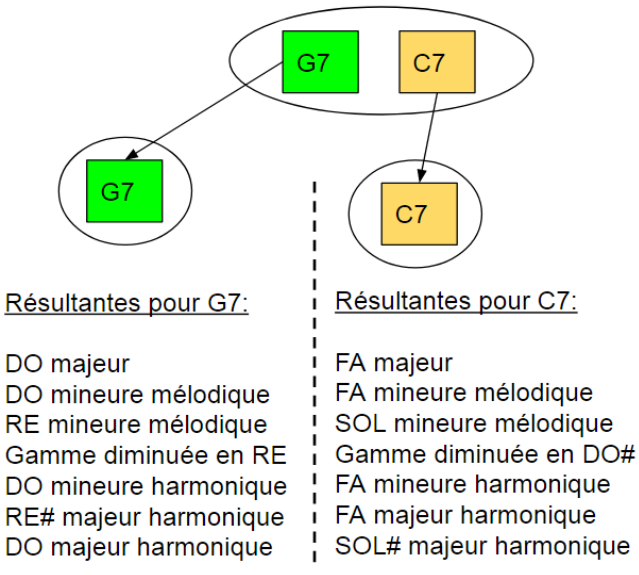
En effet les deux accords ne peuvent pas produire une gravitation tonale, à cause de la condensation tonale ***la#-si-do***.

Il faut donc segmenter les deux accords. La seule possible segmentation est la suivante :

```
[G7] - [C7]
```

Chaque accord produit donc sa propre gravitation tonale. Il s'agit d'une segmentation atomique.

La gravitation tonale d'un accord de septième est toujours constituée par 7 résultantes.
L'image suivante montre les résultantes pour chacune des gravitation tonales.



On remarque qu'aucune résultante est commune entre les deux gravitation tonales.
La question que l'on se pose est de savoir quel est le couple de résultante avec la similitude maximale.

Le résultat du calcul est ici de suite reporté.
Parmi les 49 combinaisons de gammes le tableau suivant montre les premiers 10 résultats triés en ordre décroissant de similitude:

G7	C7	Simil
DO majeur harmonique	FA mineure mélodique	10
DO majeur / LA mineur	FA majeur / RE mineur	10
Gamme diminuée en RE	FA mineure harmonique	9
Gamme diminuée en RE	FA mineure mélodique	9
DO mineure harmonique	FA mineure mélodique	8
DO mineure mélodique	FA majeur / RE mineur	8
DO majeur harmonique	FA mineure harmonique	8
DO majeur harmonique	FA majeur / RE mineur	8
DO majeur / LA mineur	FA majeur harmonique	8
DO majeur / LA mineur	FA mineure mélodique	8

On y retrouve, avec un score maximal de 10, les deux gammes DO majeur / Fa Majeur qu'on avait évoqué, puis avec le même score les deux gammes Do majeur harmonique / Fa mineur mélodique. Avec des scores inférieurs on retrouve d'autres possibles solutions utilisées dans le jazz : gammes diminuées, superlocrien (mineur mélodique) et des gammes mineurs harmoniques.

Exemple 2 : progression harmonique descendante

On considère la suite d'accords suivants :

```
Em7, A7, D, Dm7, G7, C
```

Il s'agit visiblement d'une progression harmonique en II-V-I qui descend d'un ton. On passe alors d'une tonalité de RE majeur à une tonalité de Do majeur.

On applique la théorie de la gravitation pour vérifier cette hypothèse.

Les algorithmes de segmentation nous donnent ces résultats :

Em7,A7,D	doux(8)	**Dm7,G7,C**		
Em7,A7	moyen(5)	**D,Dm7**	presque doux(7)	**G7,C**

On a donc deux possibles segmentations. On applique l'opérateur de similitude pour avoir une idée de la similitude entres gammes en passant d'une gravitation tonale à l'autre.

Dans la première segmentation on obtient un indice de similitude de 8 entre les deux gravitations. Dans la deuxième segmentation on trouve 3 segments qui ont au maximum un indice de similitude de 7.

On choisi alors la <u>première segmentation</u> et on calcule le résultat suivant :

Em7,A7,D	Dm7,G7,C	Simil
RE majeur / SI mineur	DO majeur / LA mineur	8

Le seul résultat obtenu est cohérent avec l'analyse faite précédemment. On utilise la gamme de Ré majeur dans le premier segment et une gamme de Do majeur dans le deuxième.
On peut tester la <u>2ème segmentation</u> pour voir quels sont les résultats qu'on pourrait obtenir :

Em7,A7	Simil	D,Dm7	Simil	G7,C	Moyenne	Ecart
RE mineure mélodique	5	Gamme diminuée en DO	7	DO majeur harmonique	6	1.4
RE mineure mélodique	5	Gamme diminuée en DO	7	DO majeur / LA mineur	6	1.4
RE majeur / SI mineur	5	Gamme diminuée en DO	7	DO majeur harmonique	6	1.4
RE majeur / SI mineur	5	Gamme diminuée en DO	7	DO majeur / LA mineur	6	1.4
RE mineure mélodique	4	LA# majeur harmonique	6	DO majeur / LA mineur	5	1.4
RE majeur / SI mineur	4	LA# majeur harmonique	6	DO majeur / LA mineur	5	1.4
RE mineure mélodique	4	LA# majeur harmonique	4	DO majeur harmonique	4	0
RE majeur / SI mineur	4	LA# majeur harmonique	4	DO majeur harmonique	4	0

On remarque que dans cette segmentation l'accord de Re majeur et l'accord de Re mineur7 se trouvent dans le même segment.

Analyse d'une des solutions :

Em7,A7	Simil	D,Dm7	Simil	G7,C	Moyenne	Ecart
RE mineure mélodique	5	Gamme diminuée en DO	7	DO majeur / LA mineur	6	1.4

Le premier segment est une séquence II-V, mais la tonique n'est pas précisée. Elle pourrait être donc majeur ou mineur. Dans ce cas la gamme utilisée est une gamme de RE mineur mélodique qui a une similitude de 5 avec la gamme suivante qui est une gamme diminuée. Le passage entre une gamme et l'autre est plutôt brusque.

Le passage vers le dernier segment comporte une similitude de 7, ce qui fait augmenter la moyenne de similitude à une valeur 6.

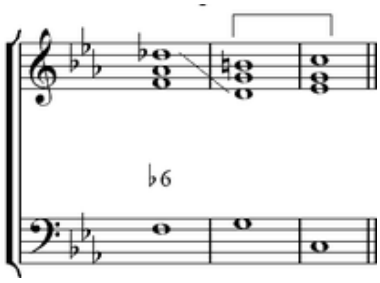
Des résultats identiques en terme de similitude sont obtenus par le résultat suivant :

Em7,A7	Simil	D,Dm7	Simil	G7,C	Moyenne	Ecart
RE majeur / SI mineur	5	Gamme diminuée en DO	7	DO majeur / LA mineur	6	1.4

Dans ce cas on utilise une gamme de RE majeur dans le premier segment. La similitude avec la gamme diminuée suivante est, comme dans le cas précédent, égal à 5. La moyenne de similitude reste modeste (6).

Exemple 3 : la sixte napolitaine

L'accord de sixte napolitaine est utilisé dans une séquence classique d'accords "sous-dominante / dominante / tonique" dans laquelle l'accord de sous-dominante est remplacé par un accord construit un demi-ton diatonique au-dessus de la tonique. En tonalité de Do majeur, par exemple, l'accord de sixte napolitaine est le Do# majeur. La note de la basse utilisée peut être le *fa sur l'accord de Do#*, suivie par la basse en *sol* dans l'accord de Sol majeur, et enfin le *do* dans l'accord de Do(tonique).



L’accord de sixte napolitaine crée une tension particulière, avant que la séquence ne converge vers la tonique en Do.

L’objectif de la théorie de la gravitation est celui d’établir les gammes qui seront utilisées dans chaque accord.

Par ailleurs, même si pour cette séquence d’accords on établit à priori une tonalité (do majeur), on ne pourra pas utiliser la gamme de Do majeur dans l’accord de Do#.

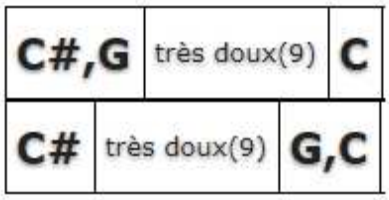
Aucune gravitation tonale ne peut exister car l’intersection des accords produit les condensations tonales ***si-do-do#*** et ***do-do#-ré***. Une gamme commune n’existe donc pas entre les trois accords. S'il est vrai qu'on peut jouer la gamme de Do majeur dans les accords G et C, il va falloir donc trouver une autre gamme qui puisse être utilisée dans l'accord de sixte napolitaine.

Pour la séquence suivante :

C# - G - C

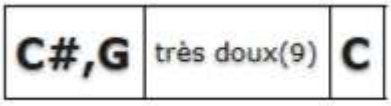
on pose en premier lieu le problème de la segmentation.

Les algorithmes de segmentations nous donnent les résultats suivants :



Il s'agit donc de deux possibles segmentations.

Première segmentation



Dans ce cas, l'accord de Do# majeur et l'accord de G se trouvent dans le même segment et il produisent donc une gravitation tonale.

L'accord de Do Majeur est isolé dans sa propre gravitation tonale.

Les résultats de similitudes sont ici de suite présentés :

C#,G	Simil	C	Moyenne
Gamme diminuée en RE	9	FA mineure harmonique	9
Gamme diminuée en RE	9	FA mineure mélodique	9
Gamme diminuée en RE	9	DO majeur harmonique	9
Gamme diminuée en RE	7	SOL# majeur harmonique	7
Gamme diminuée en RE	7	FA majeur harmonique	7
Gamme diminuée en RE	7	FA majeur / RE mineur	7
Gamme diminuée en RE	7	DO majeur / LA mineur	7
Gamme diminuée en RE	6	RE# hexatonique	6
Gamme diminuée en RE	5	SOL mineure mélodique	5
Gamme diminuée en RE	5	SOL majeur / MI mineur	5
Gamme diminuée en RE	4	Gamme diminuée en DO#	4
Gamme diminuée en RE	3	MI mineure harmonique	3

On remarque que la gravitation **Ğ (C# Φ G)** est constituée par une seule résultante : la gamme diminuée en RE. La gravitation **Ğ (C)** contient 12 résultantes. On a donc 1x12 = 12 combinaisons.

On remarque que dans cette segmentation les gammes le plus optimisées pour l'accord de DO majeur sont

- la gamme de Fa mineur harmonique
- la gamme de Fa mineur mélodique

La gamme de Do Majeur apparait moins intéressante.

Deuxième segmentation

C#	très doux(9)	**G,C**

Dans ce cas l'accord de sixte napolitaine est isolé dans sa propre gravitation tonale.
Les accord de Sol majeur et de Do majeur se trouvent dans une même gravitation.

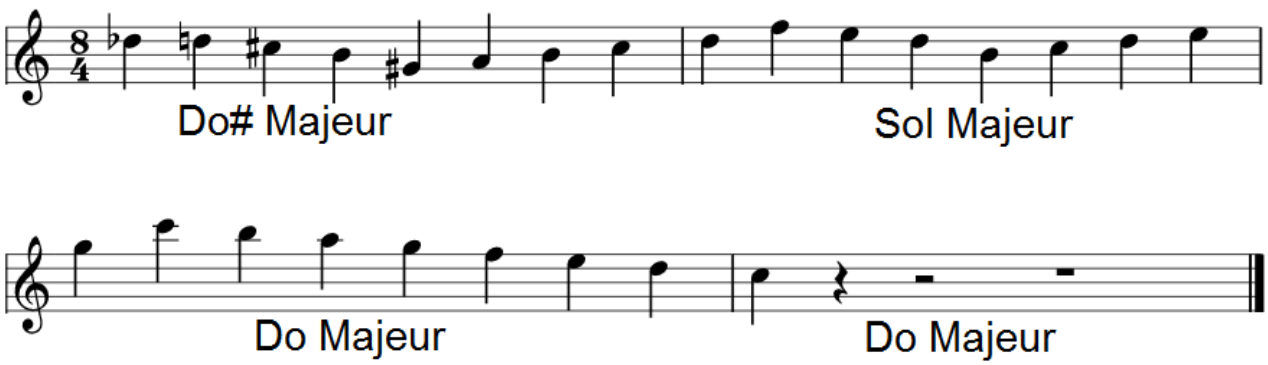
Les résultats de similitudes sont ici de suite présentés :

C#	Simil	G,C	Moyenne
Gamme diminuée en RE	9	DO majeur harmonique	9
FA mineure harmonique	8	DO majeur harmonique	8
LA majeur harmonique	8	DO majeur harmonique	8
LA majeur harmonique	8	DO majeur / LA mineur	8
DO hexatonique	7	DO majeur harmonique	7
DO hexatonique	7	DO majeur / LA mineur	7
Gamme diminuée en RE	7	DO majeur / LA mineur	7
SOL# majeur / FA mineur	6	DO majeur harmonique	6
FA mineure harmonique	6	DO majeur / LA mineur	6
LA majeur harmonique	6	SOL majeur / MI mineur	6

La combinaison la plus intéressante montre que dans l'accord de sixte napolitaine on utilisera la gamme diminuée en RE, suivie par la gamme en Do Majeur harmonique quand on passe du C# Majeur aux accords Sol Majeur et Do Majeur.

Si en revanche on veut utiliser la gamme de DO majeur dans le deuxième segment, il faudra utiliser la gamme de La majeur harmonique dans l'accord de sixte napolitaine.

Exemple :



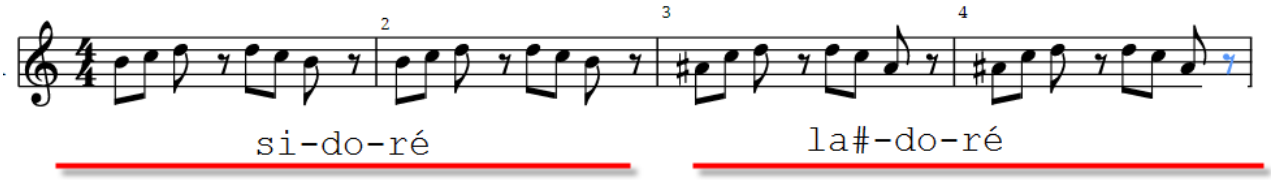
Exemple 4 : les contraintes ne sont pas des accords

Dans ce cas les contraintes ne sont pas des accords, mais un ensemble de notes quelconques qui ne contiennent pas de condensation tonale.

Il s'agit par exemple d'un motif musical qui se joue en boucle. On se pose toujours la même question : quelle sont les gammes qu'on peut utiliser ?

Cette problématique est intéressante car le processus est identique à celui utilisé pour trouver les liens entre des accords et des gammes.

Prenons cette ligne mélodique :



Dans les premières deux mesures on identifie les notes si-do-ré : il s'agit de notre première contrainte CH1.

Dans les dernières deux mesure on identifie les notes la#-do-re : il s'agit de notre deuxième contrainte CH2.

Chaque contrainte ne contient pas de condensation tonale, mais on se pose la question de l'agrégation des deux contraintes sur une même gravitation tonale.

On vérifie facilement qu'il ne peut pas y avoir une gravitation tonale commune car

$$\varsigma(CH1 \Phi CH2) = true$$

En effet l'intersection des contraintes présente la condensation tonale ***la#-si-do***.
Il s'agit alors de segmenter. Dans ce cas la segmentation est forcement la suivante :

$$[CH1] - [CH2]$$

Chaque contrainte produit sa propre gravitation tonale, et aucune gamme commune existe dans le passage entre une gravitation tonale est l'autre.

Un calcul assisté par ordinateur nous montre que chaque contrainte produit une gravitation tonale constituée par 9 résultantes. Il s'agit alors de calculer toutes les combinaisons entre ses gammes (il y en a 9x9=81) et établir les scores de similitude, puis de trier ces résultats en ordre décroissant.

Ici de suite les premiers 10 résultats de similitudes entre les résultantes des deux gravitations :

noteB,noteC,noteD	noteA#,noteC,noteD	Simil
DO mineure harmonique	RE# majeur / DO mineur	10
DO mineure mélodique	SIb majeur / SOL mineur	10
SOL majeur harmonique	SOL mineure harmonique	10
DO majeur harmonique	FA mineure mélodique	10
DO majeur / LA mineur	FA majeur / RE mineur	10
SOL majeur / MI mineur	SOL mineure mélodique	10
Gamme diminuée en DO	RE# mineure mélodique	9
Gamme diminuée en DO	LA# majeur harmonique	9
LA mineure mélodique	Gamme par ton en DO	9
DO mineure harmonique	RE# mineure mélodique	8

On a donc 6 meilleurs résultats avec un score maximal de 10.
Dans les 81 combinaisons 35 ont un score supérieur ou égal à 7.

Il est intéressant de constater que dans ce contexte on retrouve un degré de liberté assez important, et beaucoup de combinaisons avec des bons scores de similitude.

Exemple 5 : cycle des quintes

On considère la séquence d'accords suivante :

```
E7 - A7 - D7 - G7 - C7
```

La segmentation nous donne le résultat suivant :

E7	très doux(10)	**A7**	très doux(10)	**D7**	très doux(10)	**G7**	très doux(10)	**C7**

Cela nous montre qu'il est impossible de grouper les accords. La seule segmentation possible est la segmentation atomique.

Le nombre de combinaisons pour toutes les gammes issues de chaque gravitation tonale est de

$$7^5 = 16.807$$

On a donc plus que 15 milles combinaisons possibles.

Le calcul sur la similitude entre résultantes nous donne ce résultat :

E7	Simil	A7	Simil	D7	Simil	G7	Simil	C7	Moyenne	Ecart
LA majeur / FA# mineur	10	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	10	FA majeur / RE mineur	10	0
LA mineure mélodique	8	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	10	FA majeur / RE mineur	9.5	1
LA majeur harmonique	8	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	10	FA majeur / RE mineur	9.5	1
LA majeur harmonique	10	RE mineure mélodique	8	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	10	FA majeur / RE mineur	9.5	1
LA majeur / FA# mineur	10	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	8	DO majeur harmonique	10	FA mineure mélodique	9.5	1
LA majeur / FA# mineur	10	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	8	FA majeur harmonique	9.5	1
LA majeur / FA# mineur	10	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	8	FA mineure mélodique	9.5	1
LA majeur / FA# mineur	10	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	8	SOL mineure mélodique	9.5	1
SI mineure mélodique	8	RE majeur / SI mineur	10	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	10	FA majeur / RE mineur	9.5	1
Gamme diminuée en RE	9	RE mineure mélodique	8	SOL majeur / MI mineur	10	DO majeur / LA mineur	10	FA majeur / RE mineur	9.3	1

Parmi les 16.807 combinaisons, celle qui a le score le plus fort est soulignée en rouge.

Tout simplement, chaque accord de 7ème évolue vers la tonique. Il s'agit du résultat maximal car le score est toujours à 10 avec un écart de 0. Par la suite 47 combinaisons ont un score >=9
Puis 16.759 combinaisons ont un score <9.

Exemple 6 : segmentation atomique ?

Prenons cet enchainement d'accords :

```
Em7 - A7 - Dm7 - G7
```

On se pose la question suivante : est-ce qu'il vaut mieux faire une segmentation atomique ou bien procéder avec une segmentation qui puisse grouper les accords en gravitation tonales plus larges ?

Les algorithmes de segmentations conduisent aux résultats suivants :

Em7,A7	très doux(10)	**Dm7,G7**

On peut donc grouper le Em7 avec le A7, et le Dm7 avec le G7.
Le calcul de similitude nous donne ces résultats :

Em7,A7	Simil	Dm7,G7	Moyenne	Ecart
RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	10	0
RE mineure mélodique	8	DO mineure mélodique	8	0
RE majeur / SI mineur	8	DO majeur / LA mineur	8	0
RE majeur / SI mineur	6	DO mineure mélodique	6	0

On a donc 4 possibles combinaisons de gammes. La meilleure combinaison comporte l'utilisation d'une gamme de Ré mineur mélodique dans le segment [Em7-A7] suivi d'une gamme de Do majeur dans le segment [Dm7-G7].

On va maintenant appliquer une segmentation atomique :

`[Em7]  [A7]  [Dm7]  [G7]`

et calculer toutes les possibles combinaisons. On obtient au total 2401 combinaisons. Ici de suite les premiers 10 résultats :

Em7	Simil	A7	Simil	Dm7	Simil	G7	Moyenne	Ecart
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	11.3	1.2
DO majeur / LA mineur	10	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	10.7	1.2
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	8	DO mineure mélodique	12	DO mineure mélodique	10.7	2.3
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	10	DO mineure mélodique	10.7	1.2
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	10	DO majeur harmonique	10.7	1.2
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	10	RE mineure mélodique	10.7	1.2
RE majeur / SI mineur	12	RE majeur / SI mineur	8	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	10.7	2.3
RE majeur / SI mineur	10	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	10.7	1.2
Gamme diminuée en RE	9	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	10.3	1.5
DO majeur harmonique	8	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	10	2

On remarque que le meilleur résultat est toujours le même. Une similitude de 12 implique l'utilisation de la même gamme dans le passage d'une gravitation tonale à l'autre.

Beaucoup d'autres résultats apparaissent, car on n'impose plus l'utilisation de la même gamme pour les groupes `[Em7 - A7]` et `[Dm7 - G7]`.

Prenons par exemple la ligne suivante soulignée en rouge :

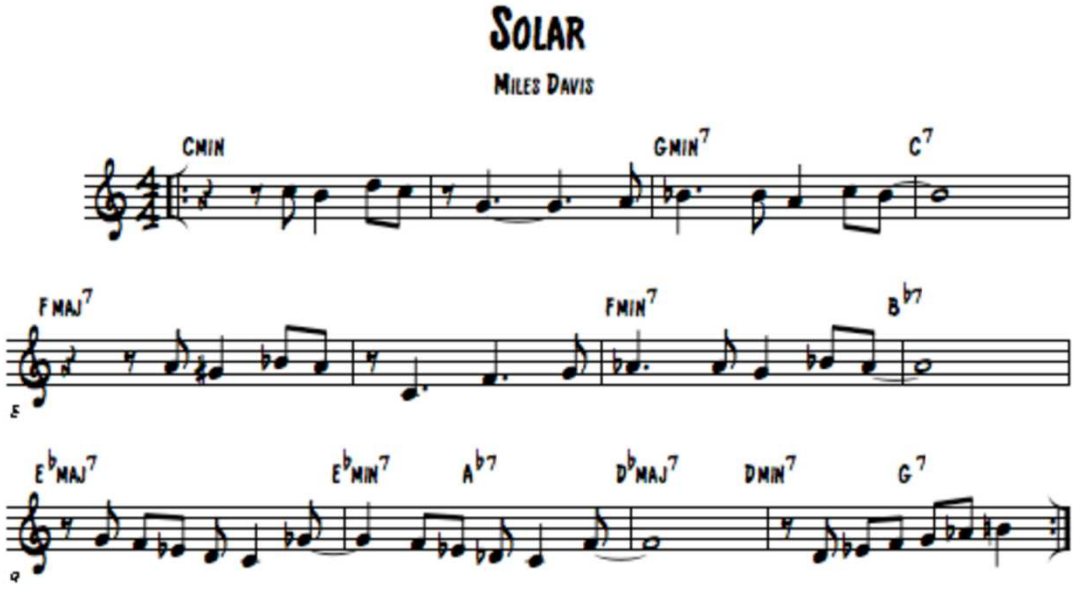
Em7	Simil	A7	Simil	Dm7	Simil	G7	Moyenne	Ecart
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	11.3	1.2
DO majeur / LA mineur	10	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	12	DO majeur / LA mineur	10.7	1.2
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	8	DO mineure mélodique	12	DO mineure mélodique	10.7	2.3
RE mineure mélodique	12	RE mineure mélodique	10	DO majeur / LA mineur	10	DO mineure mélodique	10.7	1.2
RE mineure	12	RE mineure	10	DO majeur	10	DO majeur	10.7	1.2

La moyenne de similitude est importante, mais le passage vers la gamme de Do majeur ne se fait pas brusquement, mais avec l'enchainement des gammes :

```
Do Majeur -> Ré mineur mélodique -> Do majeur
```

Exemple 7 : le standard jazz "solar"

Solar est un standard jazz, composé par Miles Davis.



On applique la théorie de la gravitation musicale à la séquence d'accords suivante :

`Cm - Gm7 - C7 - F Maj7 - Fm7 - A#7 - D# Maj7 - D#m7 - G#7 - C# Maj7 - Dm7 - G7`

L'application de l'objectif 3 à la suite d'accord nous donne les 2 segmentations suivantes :

Cm,Gm7	très doux(10)	**C7,FMaj7**	doux(8)	**Fm7,A#7,D#Maj7**	doux(8)	**D#m7,G#7,C#Maj7**	brusque(4)	**Dm7,G7**	
Cm	très doux(10)	**Gm7,C7,FMaj7**	doux(8)	**Fm7,A#7,D#Maj7**	doux(8)	**D#m7,G#7,C#Maj7**	brusque(4)	**Dm7,G7**	

La seule différence entre ces deux résultats est la position de l'accord Gm7 qui se trouve dans le premier ou dans le 2ème segment.

Analyse de la 1ème segmentation
Le calcul de similitude entre les gammes nous donne ce résultat :

Cm,Gm7	Simil	C7,FMaj7	Simil	Fm7,A#7,D#Maj7	Simil	D#m7,G#7,C#Maj7	Simil	Dm7,G7	Moyenne	Ecart
SIb majeur / SOL mineur	10	FA majeur / RE mineur	8	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	4	DO mineure mélodique	7.5	2.5
RE# majeur / DO mineur	8	FA majeur / RE mineur	8	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	4	DO mineure mélodique	7	2
SIb majeur / SOL mineur	10	FA majeur / RE mineur	8	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	2	DO majeur / LA mineur	7	3.5
RE# majeur / DO mineur	8	FA majeur / RE mineur	8	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	2	DO majeur / LA mineur	6.5	3
SIb majeur / SOL mineur	8	FA majeur harmonique	6	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	4	DO mineure mélodique	6.5	1.9
RE# majeur / DO mineur	6	FA majeur harmonique	6	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	4	DO mineure mélodique	6	1.6
SIb majeur / SOL mineur	8	FA majeur harmonique	6	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	2	DO majeur / LA mineur	6	2.8
RE# majeur / DO mineur	6	FA majeur harmonique	6	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	2	DO majeur / LA mineur	5.5	2.5

Le meilleur score :

Cm,Gm7	Simil	C7,FMaj7	Simil	Fm7,A#7,D#Maj7	Simil	D#m7,G#7,C#Maj7	Simil	Dm7,G7	Moyenne	Ecart
SIb majeur / SOL mineur	10	FA majeur / RE mineur	8	RE# majeur / DO mineur	8	DO# majeur / LA# mineur	4	DO mineure mélodique	7.5	2.5

On remarque qu'il s'agit des gammes couramment utilisées pour improviser dans le standard jazz "Solar".

On pourrait par la suite appliquer la théorie à la même séquence d'accords, mais en altérant certains accords, par exemple en rajoutant une 9# dans les accords de 7ème.

A titre d'exemple pour la séquence des 4 premiers accords, on remplace le C7 par un C7#9. Les combinaisons augmentent car le C7#9 se trouve maintenant isolé dans sa propre gravitation tonale.

On aurait par exemple ce résultat :

Cm7Maj7,Gm7	Simil	C7#9	Simil	FMaj7	Moyenne	Ecart
SIb majeur / SOL mineur	7	Gamme diminuée en DO#	9	FA majeur harmonique	8	1.4

ou encore :

SIb majeur / SOL mineur	7	Gamme diminuée en DO#	7	FA majeur / RE mineur	7	0

Le C7#9 n'est plus dans la même gravitation tonale du Fa Maj7 et une gamme à part doit être jouée sur cet accord (dans ce cas une des gammes es la gamme diminuée, utilisée fréquemment dans le jazz sur un accord 7#9) .